Lehrbuch

der

Buchstabenrechnung und Algebra

für

den Schul- und Selbstunterricht

bearbeitet

von

Konrad Fuß.

Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage.

Erster Teil:

Einleitung, die vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln, Reduktionen, Gleichungen vom ersten, zweiten und dritten Grade.

Nürnberg.
Verlag der Friedr. Kornschen Buchhandlung.
1892.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Vorwort
zur dritten Auflage.

Dieselben Gesichtspunkte, nach welchen die zweite Auflage des vorliegenden Werkchens bearbeitet wurde, waren auch für die neue Auflage leitend und maßgebend.

Nach meinem Dafürhalten muß der Mathematikunterricht in erster Linie als Mittel zur allgemeinen Geistesbildung betrieben werden. Daher enthält das vorliegende Buch nicht etwa bloß eine Anleitung zur Auflösung der verschiedenen Rechnungsarten, sondern auch einen systematischen Aufbau der wichtigsten Begriffe, Lehrsätze und Formeln der allgemeinen Arithmetik und Algebra [1]). Ich habe mich nicht damit begnügt, zu zeigen, wie die verschiedenen Aufgaben dieses Gebiets nach Rechenregeln aufzulösen sind, sondern ich habe mich auch bemüht, den Schülern ein tieferes Verständnis von dem organischen Zusammenhange der arithmetischen Operationen, von der Natur der entgegengesetzten Zahlen etc. zu eröffnen und zu erschließen [2]).

Wird der Mathematikunterricht in dieser Weise erteilt, so werden die Schüler hierdurch gründlich mit dem Wesen der mathematischen Methode vertraut. Sie gewinnen so durch diesen Unterricht im kleinen eine Vorstellung von der Art der fortschreitenden menschlichen Erkenntnis, die sich stets auf Bekanntes stützt, darauf weiterbaut und hierdurch zu neuen Wahrheiten gelangt.

---

1) „Wer den theoretischen Teil des Mathematikunterrichts dem praktischen (hier dem Rechnen) gegenüber vernachlässigt, der wirft damit ein ganz wesentliches, der Schärfung des Verstandes dienendes Bildungsmittel über Bord". — „Die Theorie ist fruchtlos ohne die Praxis, die Praxis ist geistlos ohne gründliche Theorie".

2) Viel Anregung bezüglich der methodischen Behandlung des arithmetischen Unterrichts verdanke ich dem Studium folgender vorzüglicher Werke: Hoffmann, Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Leipzig, Teubner; Wittstein, Lehrbuch der Arithmetik, aus historischen und psychologischen Grundlagen neu entwickelt; Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

Gerade diese *Schulung im deduktiven Denken* sollte die Hauptaufgabe des mathematischen Schulunterrichts sein [1]).

Die neuen Wahrheiten, d. h. die Definitionen, Lehrsätze und Formeln, welche man auf diese Weise gewinnt, *müssen das Ergebnis der unterrichtlichen Behandlung* bilden, d. h. sie *müssen von den Schülern selbst unter Leitung des Lehrers gefunden* und dürfen denselben also *nicht dogmatisch gegeben werden.* Deshalb sollten sie an das Ende der Entwicklung gestellt sein [2]). Im vorliegenden Buche stehen dieselben jedoch

---

1) Das ausschließlich *induktive* Lehrverfahren in der Arithmetik, also die Ableitung mathematischer Begriffe und Wahrheiten aus *bestimmten Zahlenbeispielen*, befriedigt Schüler reiferen Alters, die nach Erfassung des inneren logischen Zusammenhanges des Gelehrten streben, durchaus nicht, wie ich aus langjähriger Erfahrung weiß. Allerdings dürfen denselben die deduktiven Ableitungen nicht in „*größter Strenge und Allgemeinheit*" dargeboten werden, weil ihnen dadurch das Verständnis zu sehr erschwert würde. Es gilt eben, beide Lehrverfahren *in der richtigen Weise miteinander zu verbinden* (man vergleiche hierüber das vorliegende Buch!)

2) Wie sich diese *Entwicklungen* im *Unterrichte* nach dem vorliegenden Lehrbuche etwa gestalten können, möge folgendes *Beispiel* andeuten: Angenommen, es sei der Satz über die Multiplikation eines Polynoms mit einem Monome (Seite 32) zu behandeln. Nach der *dozierenden* Methode würde der Lehrer den betreffenden Lehrsatz aussprechen und sodann den dazu gehörigen (deduktiven) Beweis den Schülern zusammenhängend vortragen. Nach der *heuristischen Methode* ist etwa wie folgt zu verfahren. L.: Wir wollen jetzt untersuchen, wie ein Polynom mit einem Monome multipliciert wird. Wie kann diese Forderung in Zeichen etwa angedeutet werden? Sch.: $(a + b + c)m$. L.: Wie, wenn man statt m zunächst eine bestimmte Zahl setzt? Sch.: $(a + b + c) . 3$. L.: Wie kann man hiefür dem Begriffe des Produktes gemäß setzen? Sch.: $(a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c)$. L.: Was soll jetzt geschehen? Sch.: Es sollen drei Summen addiert werden. L.: Welche Gesetze der Addition lassen sich hierauf anwenden? Sch.: Das Kommutations- und Associationsgesetz. L.: Was erhält man hiernach? Sch.: $a + a + a + b + b + b + c + c + c$. L.: In welchen Ausdruck geht dieser durch Einführung von Koëfficienten über? Sch.: In den Ausdruck: $3a + 3b + 3c$. L.: Wieviel ist also $(a + b + c) . 3$? Sch.: $3a + 3b + 3c$. L.: Nun wollen wir statt der bestimmten Zahl die allgemeine Zahl m setzen (folgt nun derselbe Gedankengang, nur *ganz allgemein*) 2c. L.: *Zu welchem Ergebnisse sind wir also bezüglich der Multiplikation eines Polynoms mit einem Monome gelangt?* Sch.: Ein Polynom wird 2c.

vielfach an der Spitze der Entwicklung und Ableitung, da sie nach dieser Anordnung den Schülern viel übersichtlicher und präciser entgegentreten, als nach jener, was für die sichere Einprägung derselben von wesentlichem Belang ist.

Die vorliegende dritte Auflage hat der zweiten gegenüber einige Änderungen in der Anordnung des Lehrstoffs, sowie mehrere Erweiterungen (Vermehrung der vollständig gelösten Beispiele, Behandlung der kubischen und diophantischen Gleichungen, wie einiger Fälle der Zinseszinsrechnung, Einstreuung didaktischer und historischer Bemerkungen ꝛc.) aufzuweisen. Die Durcharbeitung dieser Zugaben kann vielfach dem Privatstudium der Schüler, für welche das vorliegende Buch in erster Linie bestimmt ist, überlassen werden.

Möge dem Buche auch in der neuen Auflage die wohlwollende Aufnahme zu teil werden, deren es sich in den beiden ersten Auflagen zu erfreuen hatte!

Altdorf, im August 1891.

K. Fuß.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Von den vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen.

I. Ganze Zahlen.

II. Gebrochene Zahlen.

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen.

I. Das Potenzieren mit positiven ganzen Exponenten.

Einleitung.

§. 1. Begriff der Größe und Zahl, Begriff und Einteilung der Mathematik.

1) Alles, woran man übereinstimmende Merkmale wahrnimmt, nennt man gleichartig oder homogén (Gegensatz: heterogén). Die natürlichen Dinge besitzen neben anderen Eigenschaften auch die Eigenschaft, daß sie aus gleichartigen Teilen bestehend gedacht werden können, haben die Eigenschaft der Größe (quantitas). Die Mathematik untersucht nur diese eine Eigenschaft, und nennt dasjenige, was sie in Beziehung auf seine Größe betrachtet, selbst eine Größe (quantum). Die Mathematik ist demnach die Wissenschaft von den Größen.

2) Eine Größe messen heißt, ermitteln, wievielmal eine gleichartige Größe in derselben enthalten ist. Diese letztere Größe nennt man die Einheit oder das Maß der zu messenden Größe. Die Vergleichung einer Größe mit ihrem Maße führt auf die Zahl. Zahl ist nämlich die Angabe, wievielmal die Einheit oder das Maß wiederholt werden muß, um eine Größe zu bilden. In den Größen: fünf Stunden, sechs Meilen, sieben Pfund sind eine Stunde, eine Meile, ein Pfund die den genannten Größen zu Grunde liegenden Maße oder Einheiten, fünf, sechs und sieben die Zahlen. Die Zahl in Verbindung mit der Einheit führt zum bestimmten Begriffe einer Größe. Wer z. B. eine klare Vorstellung von der Ausdehnung 1 ccm hat, der hat damit zugleich einen Begriff von der Ausdehnung eines Körpers, dessen Größe 4 ccm beträgt. Durch einerlei Einheit gemessene Größen heißen gleichnamige Größen, z. B. 8 qm, 12 qm.

3) Man unterscheidet zwei Arten von Größen: stetige und unstetige Größen. Eine stetige oder kontinuierliche[1]) Größe, auch Raumgröße genannt, ist eine Größe, deren Teile in einem ununterbrochenen Zusammenhange stehen, z. B. Raum. Eine unstetige oder diskrēte[2])

---

1) Vom lat. continŭus, zusammenhängend. 2) Lat. discrētus, in sich unterschieden oder getrennt, v. discernĕre, trennen, unterscheiden.

Größe, auch Zahlengröße genannt, ist eine Größe, deren Teile in Wirklichkeit getrennt sind und nur von dem Verstande zu einem Ganzen zusammengefaßt werden, z. B. ein Dutzend Nüsse, eine Herde Schafe.

4) Dieser Einteilung der Größen gemäß zerfällt die Mathematik in zwei besondere Wissenschaften: in die Arithmētik[1]) oder die Wissenschaft von den Zahlen oder Zahlengrößen, und in die Geometrie[2]) oder die Wissenschaft von den räumlichen Größen (Planimetrie, Stereometrie).

§. 2. Allgemeines über die Zahlen.

1) Dem vorigen §. gemäß gelangen wir zum Begriffe der Zahl durch Vergleichung der sinnlich wahrnehmbaren Dinge, der Größen, mit ihrem Maße oder ihrer Einheit. Die Zahlen so bilden, wie sie der Reihe nach durch das wiederholte je einmalige Setzen der Einheit hervorgehen, heißt zählen (numerieren), die Reihe der so entstehenden Zahlen heißt die natürliche Zahlenreihe, die einzelnen Zahlen selbst nennt man die natürlichen Zahlen (Zahlensysteme: das dekadische, hexadische u. s. w.).

2) Bezeichnet eine Zahl eine Vielheit bestimmter Einheiten, so heißt sie eine benannte (konkrete) Zahl, und jene Einheit ist die Benennung, z. B. drei Pfund, acht Pferde; drückt sie dagegen nur die Vielheit an sich aus, so nennt man sie eine unbenannte oder reine (abstrakte) Zahl, z. B. fünf, zehn. Neben den Wörtern für die Zahlen, den Zahlwörtern: eins, zwei, drei u. s. w. hat man noch eigne Zeichen für dieselben eingeführt, die Ziffern, z. B. für die Zahlen vier, fünf und sechs die Ziffern 4, 5 und 6 (indo-arabische Zahlenbezeichnung, Stellenwert, Zifferrechnung).

3) Die Aufgabe der Arithmetik ist eine doppelte; einerseits hat sie die Natur und die Eigenschaften der Zahlen zu erforschen (Zahlenlehre oder Theorie der Zahlen), andererseits hat sie das Rechnen mit den Zahlen zu lehren (theoretische und praktische Aufgabe). Rechnen heißt, aus gegebenen Zahlen auf vorgeschriebene Weise andere Zahlen bestimmen. Die einfachste Art des Rechnens ist das Zählen, alle anderen Arten sind daraus abzuleiten (Rechnungsoperationen). Die Verbindungen von Zahlen zu neuen Zahlen nennt man Ausdrücke, Zahlen-

1) Vom gr. arithmós, m., die Zahl. 2) Vom gr. géa, zsgz. gē, Erde, Land, und metrein, messen, wörtlich also: Erd-, Land- oder Feldmeßkunst.

ausdrücke, zusammengesetzte Zahlen oder Zahlenformen, z. B. (4 + 5) oder (9 : 6); den Gegensatz hiezu bilden die einfachen Zahlen, z. B. 5.

§. 3. Buchstaben als Zahlzeichen.

1) Hauptaufgabe der Arithmetik ist Erforschung der Gesetze des Rechnens, d. h. der Gesetze der Zahlenverbindungen. Da nun diese Gesetze jedenfalls von allen Zahlen gelten, so hat man, um dieselben unabhängig von den besonderen Werten der Zahlen, die verbunden werden sollen, in der notwendigen Allgemeinheit ausdrücken zu können, außer den Zeichen für bestimmte Zahlen (Zahlen mit genauer Angabe der Menge ihrer Einheiten) auch noch Symbole für allgemeine (unbestimmte) Zahlen, d. h. Zahlen, bei denen ein besonderer Wert derselben nicht in Betracht kommt, nötig. Als Zeichen für solche allgemeine Zahlen wendet man Buchstaben (in der Regel die des kleinen lateinischen Alphabets) an. Die durch Buchstaben bezeichneten Zahlen nennt man Buchstabengrößen, litterale Zahlen oder allgemeine Zahlen, im Gegensatz zu den mittelst Ziffern dargestellten numerischen oder bestimmten Zahlen[1]). Sehr häufig werden numerierte Buchstaben angewendet, d. h. Buchstaben, denen rechts unten Ziffern angehängt sind, die man Stellenzeiger (Indīces[2]), Suffixe[3]) nennt, z. B. a_1, a_2, a_3 (sprich: a-eins, a-zwei, a-drei); zuweilen werden den Buchstaben auch kleine Striche angefügt, und zwar rechts oben, z. B. a', a'', a''' (gelesen: a-strich, a-zweistrich, a-dreistrich). Ein Buchstabe kann jede beliebige Zahl bedeuten; kommt aber in einer Rechnung ein und derselbe Buchstabe wiederholt vor, so bezeichnet er jedesmal dieselbe Zahl.

2) Die Anwendung der Buchstaben statt der Zahlen beim Rechnen gewährt mannigfache Vorteile. Zunächst wird man durch

---

1) Die Einteilung der Zahlen nach ihrer Bezeichnungsweise stellt folgendes Schema übersichtlich dar:

Zahlzeichen
- numerisches
  - einfaches: z. B. 8
  - zusammengesetztes: z. B. 8 + 4
- litterales
  - einfaches: z. B. a
  - zusammengesetztes: z. B. 3a + 2b.

2) Lat. Index, m. (Gen. Indĭcis, Pl. Indīces), der Zeiger. 3) Lat. suffixum, n. (Pl. suffixa), ein Anhängsel hinten an einem Worte (v. suffigĕre, unten oder hinten anheften, anfügen).

sie in den Stand gesetzt, Sätze, welche von allen Zahlen gelten, mit völliger Allgemeinheit und dennoch kürzer als in Worten auszudrücken. Dies läßt sich leicht an einigen Sätzen erläutern. So wird z. B. durch $a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n$ eine Eigenschaft der Multiplikation und Addition von unbegrenzt vielen Zahlen kurz und ganz allgemein ausgedrückt, denn man erhält immer eine richtige Gleichung, welche Zahlen man auch an die Stelle der Buchstaben a, m und n setzen mag, also $3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4$; $12 \cdot (6 + 1) = 12 \cdot 6 + 12 \cdot 1$, u. s. w. Als weitere Belege können dienen: $a \cdot (m - n) = a \cdot m - a \cdot n$ oder $m \cdot m - n \cdot n = (m + n) \cdot (m - n)$. Insbesondere sind einige Formeln aus der Geometrie, z. B. die über die Anzahl der Geraden, welche zwischen 2, 3, 4, 5, n Punkten möglich sind, nämlich $n\,(n - 1) : 2$, oder die über die Anzahl der Diagonalen eines 3, 4, 5 n ecks, nämlich $n\,(n - 3) : 2$, geeignet, diesen Nutzen des Buchstabengebrauchs zu veranschaulichen und das Interesse des Anfängers zu fesseln. Daß zum Ausdruck dieser und anderer Gesetze bestimmte Zahlen nicht ausreichen, ist klar, denn den durch solche Zahlen ausgedrückten Gleichungen sieht man es nicht an, daß sie auch für beliebige andere Zahlen gelten, sonst könnte man ja aus der Gleichung $2 \cdot 2 = 2 + 2$ schließen, daß auch $3 \cdot 3 = 3 + 3$ oder $4 \cdot 4 = 4 + 4$ wäre.

Sodann sind die Rechnungen mit Buchstabengrößen einfacher und leichter als die mit numerischen Zahlen. Es ist daher, wenn eine Aufgabe zu lösen ist, vorteilhaft, an die Stelle der Zahlen Buchstaben zu setzen; man deutet dann durch die Verbindung dieser Buchstaben an, welche Operationen der Aufgabe gemäß mit den Zahlen vorgenommen werden sollen, reduciert das erhaltene Resultat auf die zum Rechnen bequemste Form und führt schließlich an Stelle der Buchstaben die Zahlen wieder ein. Zur Erläuterung kann folgendes Beispiel dienen. Es sei die Aufgabe: „Welche Zahl ergibt sich, wenn man die halbe Summe und die halbe Differenz der beiden Brüche $\frac{43}{81}$ und $\frac{2}{5}$ addiert?" zu lösen. Bezeichnet man den Bruch $\frac{43}{81}$ mit m und den Bruch $\frac{2}{5}$ mit n, so deutet $\frac{1}{2} \cdot (m + n)$ die halbe Summe, $\frac{1}{2} \cdot (m - n)$ die halbe Differenz dieser beiden Brüche an und der Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ stellt alle Operationen dar, welche der Aufgabe gemäß auszuführen sind. Nun kommt es darauf an, diesen Ausdruck auf einen einfacheren zu bringen. Zu dem Zwecke bedenke man, daß man statt $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ auch

$\frac{1}{2} \cdot m + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot m - \frac{1}{2} \cdot n$ setzen kann. Es ist nun ersichtlich, daß $\frac{1}{2} \cdot n$ durch $- \frac{1}{2} \cdot n$ getilgt wird und daß $\frac{1}{2} \cdot m + \frac{1}{2} \cdot m$ so viel als m ist. Mithin läßt sich der ganze Ausdruck $\frac{1}{2} \cdot (m + n) + \frac{1}{2} \cdot (m - n)$ auf die Größe m zurückführen. Da nun $m = \frac{43}{81}$ ist, so erhält man als Resultat der obigen Aufgabe $\frac{1}{2} \cdot (\frac{43}{81} + \frac{2}{5}) + \frac{1}{2} \cdot (\frac{43}{81} + \frac{2}{5})$ den Wert $\frac{43}{81}$.

Endlich gewähren sie auch den Vorteil, daß man mit ihrer Hilfe noch unbekannte Zahlen kurz bezeichnen und diese nun in die Rechnung einführen kann (zur Bezeichnung noch unbekannter Zahlen pflegt man die letzteren Buchstaben x, y, z, zur Bezeichnung bekannter Zahlen die ersteren Buchstaben des Alphabets zu nehmen).

3) Da die Arithmetik, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Rechnungsoperationen sowohl mit numerischen als litteralen Zahlen ausführen kann, so zerfällt sie in zwei Teile: in die spezielle oder gemeine und in die allgemeine Arithmetik. Erstere beschäftigt sich nur mit bestimmten Zahlen, letztere bedient sich allgemeiner Zahlen und gebraucht zum Ausdruck derselben Buchstaben; dieses letzteren Umstandes halber heißt die allgemeine Arithmetik auch Buchstabenrechnung. Ein besonderer Teil derselben führt den Namen Algebra[1]. — Die bisher genannten Teile der Mathematik bringt folgendes Schema zur Übersicht:

Mathematik

Arithmetik		Geometrie	
Spezielle A. (Zifferrechnung)	Allgemeine A. (Buchstabenr.).	Planimetrie	Stereometrie

§. 4. Gleichung, Ungleichung, Relation und Formel.

1) Zwei Zahlen heißen einander gleich, wenn sie die nämliche bestimmte Zahl bedeuten, wenn sie also in ihrem Inhalte übereinstimmen. Man deutet dies durch das zwischen die beiden Zahlen gesetzte Gleichheitszeichen (=) an, z. B. a = b (gelesen: „a gleich b“).

---

1) Buchstaben statt der Zahlen wurden durch Regiomontanus (gest. 1476), Cardanus (gest. 1575) u. A., namentlich aber durch Franz Viëta (geboren 1540, gest. 1603 in Paris) eingeführt.

Die symbolische Darstellung der Gleichheit zweier Ausdrücke heißt **Gleichung** (aequatio); der links vom Gleichheitszeichen stehende Ausdruck heißt die **linke Seite**, der rechts davon stehende die **rechte Seite** der Gleichung.

2) Sind zwei Zahlen ihrem Inhalte nach verschieden, so nennt man sie **ungleich**. Das Zeichen der Ungleichheit ist ein Winkel, dessen Öffnung der größeren Zahl zugekehrt wird (Konvergenz- und Divergenzzeichen). Die symbolische Darstellung der Ungleichheit zweier Ausdrücke wird eine **Ungleichung** genannt, z. B.:

$a > b$	Gelesen: „a größer als b" (oder rückw.: „b kleiner als a").
$a < b$	„a kleiner als b" („ „ : „b größer als a").
$a \gtrless b$	„a größer oder kleiner als b.
$a \mathrel{\substack{>\\=\\<}} b$	„a größer, gleich oder kleiner als b."

3) Gleichungen und Ungleichungen bezeichnet man mit dem gemeinsamen Namen **Relation**. Zwischen irgend zwei Zahlen muß jederzeit eine bestimmte Relation bestehen; d. h. es ist entweder $a < b$, oder $a = b$ oder $a < b$.

4) Gleichungen, welche arithmetische Gesetze, die sich auf alle Zahlen beziehen, in allgemeinen Ausdrücken darstellen, heißen **Formeln**. So spricht z. B. die Formel $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ aus: „Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man die Zahl mit jedem Summanden multipliciert und die Produkte addiert", z. B. $12 \cdot (4 + 3) = 12 \cdot 4 + 12 \cdot 3 = 48 + 36 = 84$.

§. 5. Operationszeichen.

1) Die vier Species: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, welche die Basis aller andern Rechnungsarten bilden, deutet man durch besondere Zeichen, Rechnungs- oder **Operationszeichen** genannt, an, nämlich:

die Addition durch das Zeichen $+$, gelesen: „plus"
„ Subtraktion durch das Zeichen $-$, gelesen: „minus"
„ Multiplikation durch das Zeichen $\times$ oder $\cdot$, gelesen: „mal"
„ Division durch das Zeichen : oder ———, gelesen: (dividiert) „durch."

Beispiele:

a + b	Gelesen: „a plus b"	(rückwärts: „b plus a").
a — b	„a minus b"	(„ : „b **von** a").
a × b oder a · b	„a mal b"	(„ : „b mal a").
a : b oder $\frac{a}{b}$	„a durch b"	(„ : „b **in** a").

2) Das Multiplikationszeichen wird jedoch in mehreren Fällen weggelassen, und zwar: 1) bei Multiplikation einer litteralen Zahl mit einer numerischen Zahl, z. B. 6a (gelesen: sechs a, statt 6 mal a);

2) bei Multiplikation zweier oder mehrerer Buchstabengrößen, z. B. ab (gelesen: ab statt a mal b), oder mnp statt m · n · p;

3) wenn ein in Klammern stehender Ausdruck mit einer bestimmten Zahl oder mit einer Buchstabengröße multipliciert werden soll, z. B. 6 (a + b + c), b(m + n), 8c (r + s + t);

4) wenn zwei oder mehrere in Klammern stehende Ausdrücke zu multiplicieren sind, z. B. (a + b) (c + d) oder (a + b) (c + d) (m + n + q).

§. 6. Gebrauch der Klammern und Reihenfolge der Operationen.

1) Jeder zusammengesetzte Ausdruck, mit dem irgend eine Rechnung vorgenommen werden soll, muß eingeklammert werden. Die Klammer oder Parenthese hat demnach den Zweck, den von ihr umschlossenen Ausdruck als eine einzige Zahl darzustellen. Soll a um die Summe von b und c vermindert werden, so muß man schreiben: a — (b + c); man lese: „a minus Klammer auf b plus c Klammer geschlossen". Würde man in diesem Falle a — b + c schreiben, so hätte dieser Ausdruck folgende Bedeutung: a soll um b vermindert und der Rest wieder um c vermehrt werden. Um anzudeuten, daß die Summe von a und b mit c multipliciert werden soll, muß man schreiben (a + b) · c; man lese: „Klammer auf a plus b Klammer geschlossen mal c".

Beispiele:

(5 + 8) · 3 = 13 · 3 = 39.

24 — (3 + 5) = 24 — 8 = 16.

30 — (15 — 10) = 30 — 5 = 25.

Wenn in einem Ausdrucke mehrere Klammern nötig sind, so bedient man sich zur Erleichterung der Übersicht verschiedenartiger

Klammern: der starken und schwachen runden **( )**, ( ); der starken und schwachen eckigen **[ ]**, [ ] und der geschwungenen { }.

2) Über die Reihenfolge der Operationen ist noch folgendes zu bemerken: a) **Kommen Operationen derselben Stufe**[1] **ohne Klammern verknüpft vor**, so hat man sich dieselben in der Reihenfolge, in der man liest (von links nach rechts) fortschreitend ausgeführt zu denken. Hiernach bedeutet z. B.

$$a - b + c = (a - b) + c,$$
$$a : b : c = (a : b) : c.$$

Es ist also:

$$12 + 8 - 3 = 20 - 3 = 17.$$
$$20 - 5 + 4 = 15 + 4 = 19.$$
$$24 \cdot 3 : 4 = 72 : 4 = 18.$$
$$100 : 10 : 2 = 10 : 2 = 5.$$

b) **Kommen Operationen verschiedener Stufen zusammen, ohne daß durch Klammern ihre Reihenfolge vorgeschrieben wäre, so hat man sich jederzeit die Operationen der höheren Stufe zuerst ausgeführt zu denken** (also gehen z. B. die Multiplikation und Division der Addition und Subtraktion voraus). Hiernach ist also $a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$, oder $a + b : c = a + (b : c)$.

Beispiele:

$$5 + 3 \cdot 8 = 5 + 24 = 29.$$
$$18 - 12 : 4 = 18 - 3 = 15.$$
$$80 \cdot 2 + 10 = 160 + 10 = 170.$$
$$80 : 20 - 3 = 4 - 3 = 1.$$

3) Ein Ausdruck, in dem nicht einfache Zahlen, sondern selbst wieder Ausdrücke vorkommen, heißt **zusammengesetzt**, z. B. $12 + (8 - 5)$, $(15 + 6)(13 - 7)$, u. s. w. In welcher Reihenfolge hierbei die Operationen auszuführen sind, das entscheiden die vorstehend angeführten **Klammerregeln**. Einen solchen Ausdruck so umformen, daß er ohne Klammern richtig erscheint, heißt, **die Klammern auflösen** oder **wegschaffen** (den Ausdruck **berechnen**). Hierüber sind folgende Regeln zu beachten:

---

1) Addition und Subtraktion sind die Operationen der ersten, Multiplikation und Division der zweiten Stufe.

a) Die innerhalb einer Klammer angedeutete Rechnung wird vor den außerhalb vorgeschriebenen Operationen ausgeführt.

b) Gleichstufige Operationen, die ohne Klammern aufeinanderfolgen, werden in der Reihenfolge, wie man liest, ausgeführt.

c) Von zwei ungleichstufigen, klammerlos aufeinanderfolgenden Operationen, wird die Operation höherer Stufe zuerst ausgeführt. Beispiele:

1) $24 - 5 \cdot (1 + 2) = 24 - 5 \cdot 3 = 24 - 15 = 9$

2) $(12 + 8 \cdot 5) : (9 + 4) = (12 + 40) : 13 = 52 : 13 = 4.$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl. §. 10, 1 bis 5.

§. 7. Die mathematische Methode.

Die Mathematik ist eine Wissenschaft im strengsten Sinne des Wortes; mathematische Gewißheit gilt als die vollkommenste Gewißheit. Das Verfahren, das die Mathematik einschlägt, um ihr wissenschaftliches Gebäude zu errichten, ist wie das, welches man bei allem gründlichen Denken anwendet, ein Fortschreiten vom Bekannten zum Unbekannten. Die auf diese Weise im Laufe der Zeit gefundenen Wahrheiten bilden den Inhalt der Mathematik. Derselbe besteht in Erklärungen, Grundsätzen, Lehrsätzen und Aufgaben.

1) Eine Erklärung oder Definition[1]) ist die Angabe der wesentlichen Merkmale eines Begriffs. Wird in derselben angegeben, wie eine Größe entsteht, so wird sie genetische Erklärung genannt.

2) Ein Grundsatz oder Axiōm[2]) ist eine an sich deutliche und klare Grundwahrheit, die des Beweises nicht bedarf.

3) Ein Lehrsatz oder Theorēm[3]) ist der Ausspruch einer Wahrheit, welche durch Gründe bewiesen werden muß. Bei jedem Lehrsatze unterscheidet man dreierlei: die Voraussetzung, die Behauptung und den Beweis. Die Voraussetzung oder Hypothése[4]) nennt den Gegenstand, von dem etwas ausgesagt wird und gibt die Bedingungen an,

---

1) Lat. definitĭo, f., Begriffsbestimmung. 2) Gr. axiōma, n., ein unbezweifelter Grundsatz, v. axiūn, für recht halten. 3) Gr. theōrēma, n., eig. das Angeschaute, Betrachtete, v. theōreīn, betrachten. 4) Gr. hypothĕsis, f., eine zu Grunde gelegte Voraussetzung oder vorausgesetzte Meinung, eine Annahme.

unter denen die ausgesprochene Wahrheit Gültigkeit hat. Die Behauptung oder Thése[1]) spricht die zu beweisende Wahrheit aus[2]). Der Beweis oder die Demonstration[3]) enthält die Gründe für die Richtigkeit der Behauptung. Der Beweis kann direkt und indirekt geführt werden. Der direkte[4]) Beweis beginnt im allgemeinen mit der Voraussetzung, verbindet mit ihr frühere bereits als wahr anerkannte Sätze und sucht so die Behauptung als Folgerung dieser Sätze hinzustellen. Einen Satz beweisen heißt demnach: seine Richtigkeit von andern Wahrheiten ableiten, ihn vermittelst anderer Sätze, die man bereits als richtig anerkannt hat (Grundsätze und Lehrsätze) als wahr darthun[5]). Der indirekte oder apagogische[6]) Beweis (reductio in absurdum) zeigt, daß das Gegenteil der Behauptung nicht stattfinden könne (ad absurdum reducieren oder führen heißt, der Ungereimtheit überführen). Einen Lehrsatz umkehren heißt, einen neuen Satz bilden, worin Voraussetzung und Behauptung des ersteren gegen einander vertauscht sind.

4) Der Zusatz oder der Folgesatz[7]) enthält eine Folgerung aus vorhergehenden Lehrsätzen, welche ohne ausführlichen Beweis einleuchtet.

---

1) Gr. thésis, f., ein zu beweisender Satz. 2) In dem Satze: „Wenn zwei gerade Linien auf einer drttten senkrecht stehen, so sind sie parallel," ist die Voraussetzung in den Worten enthalten: „Wenn zwei gerade Linien auf einer dritten senkrecht stehen," und die Behauptung in den Worten: „so sind sie parallel." In dieser Form treten sehr viele Sätze der Geometrie auf. Sie besteht also, wie dieses Beispiel zeigt, darin, daß die Voraussetzung mit „wenn" vorausgeschickt wird und darauf die Behauptung mit „so" folgt. Häufig haben die Sätze auch eine andere Form, z. B.: zwei Parallellinien sind überall gleichweit von einander entfernt." In diesem Falle kann man sie stets auf die angegebene Form zurückführen; hier also so: Wenn zwei gerade Linien parallel sind, so sind sie überall gleich weit von einander entfernt. Es ist wichtig, daß man Voraussetzung und Behauptung unterscheiden lerne. Der Schüler übe sich daher in dieser Unterscheidung auch an nicht mathematischen Sätzen; so enthält z. B. der Satz: „Im Frühling blühen die Veilchen" die Voraussetzung: „wenn es Frühling ist," und die Behauptung: „so blühen die Veilchen." 3) Lat. demonstratĭo, f., Beweisführung. 4) Lat. diréctus, unmittelbar. 5) Auf die Übereinstimmung des Ergebnisses des Beweises mit der aufgestellten Behauptung pflegt man durch die Buchstaben w. z. b. w. (was zu beweisen war) oder q. e. d. (quod erat demonstrandum) hinzudeuten, welche man dem Beweise beisetzt. 6) Vom gr. Apagoge, f., Folgerung aus dem Falschsein des Gegenteiles. 7) Lat. corollarĭum, n., eig eine Zulage. Die Folgerungen, die man aus den bewiesenen Lehrsätzen zieht, sind für den Aufbau des mathematischen

5) Die Aufgabe oder das Problēm[1]) ist die Forderung, aus gegebenen Größen andere herzuleiten. Die Angabe, wie die gegebenen Größen der aufgestellten Forderung gemäß mit einander verbunden werden müssen, nennt man die Auflösung der Aufgabe. Der Beweis hat darzuthun, daß die Forderung wirklich erfüllt ist.

6) Der Forderungssatz oder das Postulat[2]) verlangt, etwas herzustellen, das eine unmittelbare Grundvorstellung ist, z. B. zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen, oder einen Kreis mit gegebenem Radius zu zeichnen (Postulate der Planimetrie; Voraussetzung der natürlichen Zahlenreihe das einzige Postulat der Arithmetik).

§. 8. **Die allgemeinen mathematischen Grundsätze.**

1) Jede Größe ist sich selbst gleich, also $a = a$, $b = b$ (Grundsatz der Einerleiheit oder Identitätsgrundsatz).

2) Gleiches darf stets für Gleiches gesetzt werden (Substitutionsgrundsatz). Hiernach ist man immer berechtigt, für eine Zahl eine andere gleichwertige Zahl zu setzen; so kann man z. B. in jeden Ausdruck, ohne den Wert desselben zu ändern, für die darin etwa vorkommende Zahl 12 setzen $3 \cdot 4$, $2 \cdot 6$ oder $7 + 5$ u. s. w. Die Einsetzung einer Zahl für eine gleichwertige Zahl nennt man Substitution[3]) (man sagt: für eine Zahl, z. B. für a, werde eine andere, z. B. b, substituiert[4]); a ist die zu ersetzende, zu eliminierende[5]) Zahl, b die dafür einzusetzende, zu substituierende Zahl).

Lehrgebäudes von großer Bedeutung, was Rückert wie folgt sehr schön ausdrückt:

„Dem Mathematiker ist darum nur gelungen
So Vieles, weil er zieht aus Allem Folgerungen.
Er folgert, wenn er auch nicht sieht, wozu es frommt,
Erwartend, ob es ihm einmal zu Statten kommt.
Auf einmal sieht er, wie Unnützes selber nützt,
Wie Allergrößtes sich auf Allerkleinstes stützt."

1) Gr. próblēma, n. (eig. Vorwurf, v. propállein, vorwerfen, vorlegen), eine zu lösende Aufgabe. 2) Lat. postulātum, n., das Geforderte. 3) Lat. substitutĭo, Ersetzung, Unterschiebung. 4) Substituieren (lat. substituĕre), unterstellen, ersetzen, unterschieben. 5) Eliminieren (lat. elimināre, eig. aus dem Hause stoßen, v. e, aus, heraus, u. limen, die Schwelle), tilgen, entfernen, wegschaffen.

3) Wenn zwei Größen einer und derselben dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich. (Komparationsgrundsatz)[1]).

$$\begin{array}{c} a = c \\ b = c \\ \hline a = b \end{array}$$

(den Strich liest man: „folglich").

4) Das Ganze ist gleich allen seinen Teilen zusammengenommen und das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

5) Gleiches zu Gleichem addiert, gibt gleiche Summen; Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt gleiche Differenzen; Gleiches mit Gleichem multipliciert, gibt gleiche Produkte; Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt gleiche Quotienten, u. s. w. Wenn $a = b$

Und $c = d$ ist, so ist auch:

1) $a + c = b + d$,

2) $a - c = b - d$,

3) $ac = bd$,

4) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Diese vier Grundsätze lassen sich in das allgemeine Princip: Gleiches auf gleiche Weise verändert, bleibt gleich zusammenfassen. (Operationsgrundsatz, und zwar: Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionsgrundsatz, Grundsatz der Potenzierung und Radicierung).

6) Gleiches auf ungleiche Weise verändert, wird ungleich.

7) Ungleiches auf gleiche Weise verändert, bleibt ungleich.

1) Komparation, f. (lat. comparatio), die Vergleichung.

Erster Abschnitt.

Von den vier Species mit allgemeinen algebraischen Zahlen.

I. Ganze Zahlen.

§. 9. Die algebraischen Zahlen.

1) Unter den Buchstaben, welche man zur allgemeinen Auflösung von Aufgaben benützt, kann man sich, da nach 1) des §. 3 ein Buchstabe jede beliebige Zahl bedeuten kann, irgend welche Zahlen der natürlichen Zahlenreihe (§. 2) vorstellen. Es fragt sich nun, ob sämtliche Rechenoperationen, welche solche Aufgaben zu ihrer Auflösung fordern, auch wirklich innerhalb der natürlichen Zahlenreihe in allen Fällen ausgeführt werden können. Bei der Addition ist dies der Fall; denn da die natürliche Zahlenreihe im Sinne des Vorwärtsschreitens unbegrenzt ist, so können zwei oder mehrere Zahlen immer addiert werden; so ist z. B. die Aufgabe a) unter 5. des §. 10 meiner Aufgabensammlung innerhalb der natürlichen Zahlenreihe immer lösbar, man mag für a und b Zahlen einsetzen, welche man will. Nicht so verhält es sich mit der Subtraktion. Hier kann es sich vielmehr treffen, daß durch die Einsetzung bestimmter Werte in die allgemeinen Formeln der Subtrahend größer wird als der Minuend. In diesem Falle gelangt man beim Rückwärtszählen vom Minuend aus schon zu Null, bevor noch die ganze Anzahl von Einheiten ab- oder zurückgezählt ist, die der Subtrahend fordert. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn man in der Aufgabe b unter 5. des §. 10 der erwähnten Sammlung für v z. B. 15 und für e etwa 24 setzt, denn alsdann ergibt sich der allgemeinen Auflösung: $g = v - e$ zufolge als Gewinn: $g = 15 - 24$. Die Subtraktion ist innerhalb der natürlichen Zahlenreihe nur dann ausführbar, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Aus diesem Grunde sind Ausdrücke wie $15 - 24$ vollständig bedeutungslos, da ihnen keine Zahl der natürlichen Zahlenreihe entspricht.

2) Dieser Umstand legt die Frage nahe, in welcher Weise wohl die natürliche Zahlenreihe zu erweitern und zu vervollständigen ist,

damit die Subtraktion in allen Fällen ausgeführt werden kann. Der Grund für die Nichtausführbarkeit der Subtraktion in dem Fall, wenn der Subtrahend größer ist als der Minuend liegt darin, daß die natürliche Zahlenreihe nach unten mit der Zahl 1 abbricht. Daraus folgt, daß die Subtraktion auch für den angeführten Fall ausführbar wird, wenn man dieses Hindernis beseitigt, man also die natürliche Zahlenreihe rückwärts über Null hinaus erweitert; denn alsdann kann man stets die Zahl angeben, welche die Differenz zwischen dem Minuend und dem Subtrahend ist.

3) Man hat daher die natürliche Zahlenreihe in der Weise erweitert, daß man ihr von Null ausgehend rückwärts eine neue unbegrenzte Reihe von Zahlen anfügt, die unter sich in der nämlichen Weise auf einander folgen, wie die ursprünglichen Zahlen. Den Mittelpunkt dieser beiden Zahlenreihen bildet die Null; von ihr geht das Zählen sowohl auf- als abwärts aus, nämlich:

$$\ldots\ldots 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ \mathbf{0},\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ldots$$

Selbstverständlich müssen die Glieder dieser zwei Reihen durch irgend ein Zeichen von einander unterschieden werden. Da die Glieder der Zahlenreihe über Null durch Addition der Einheit, dagegen die Zahlen der Reihe unter Null durch Subtraktion der Einheit, durch eine stete Verminderung über Null hinaus, entstehen, so liegt es nahe, die ersteren durch +, die letzteren durch — zu bezeichnen, also:

$$\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ \mathbf{0},\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5 \ldots$$

4) Die Zeichen + und —, welche in der bestimmten Arithmetik Operationszeichen sind, dienen somit in der allgemeinen Arithmetik dazu, die verschiedene Lage der Zahlen in Bezug auf Null zu bezeichnen. Deshalb heißen sie in diesem Sinne Beziehungs-, Richtungs- oder Vorzeichen. Um diesen Gegensatz in der Lage der Zahlen in Beziehung auf Null auch in Worten auszudrücken, nennt man die Zahlen der Reihe über Null positive[1]), hingegen die der Reihe unter Null negative[2]) Zahlen (positive und negative Zahlenreihe). Alle Zahlen, welche auf derselben Seite von Null liegen, welche also mit demselben Vorzeichen versehen sind, heißen gleichartige oder übereinstimmende Zahlen.

---

1) Lat. positīvus, bejahend, fest, gewiß, wirklich vorhanden. 2) Lat. negatīvus, verneinend, entgegengesetzt, v. negāre, verneinen.

Zahlen dagegen, welche auf verschiedenen Seiten von Null liegen, also mit verschiedenen Vorzeichen behaftet sind, nennt man entgegengesetzte Zahlen. Beide Arten von Zahlen führen den gemeinschaftlichen Namen algebraische, relative[1]) Zahlen, oder Richtungszahlen. Zahlen, bei denen eine verschiedene Lage zu Null nicht in Betracht kommt, sondern nur die Menge ihrer Einheiten, ihr absoluter Zahlenwert, heißen absolute[2]) Zahlen.

5) Es ist nun einleuchtend, daß durch die soeben erwähnte Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe, der Zweck, die Subtraktion allgemein ausführbar zu machen, vollkommen erreicht ist. Ist z. B. die Differenz 15—24 zu bestimmen, so zählt man von 15 aus 24 Einheiten abwärts; hiedurch gelangt man zu — 9; also ist 15—24 = — 9.

6) An jeder algebraischen Zahl unterscheidet man das Vorzeichen und den Zahlenwert (die Menge der in ihr ausgedrückten Einheiten). Die Null hat kein Vorzeichen. Die Vorzeichen der algebraischen Zahlen lassen sich durch das Hinzunehmen der Null auf die Bedeutung eines Additions- und Subtraktionszeichens zurückführen, denn es ist $+a = o + a$ und $(-a) = o - a$

7) Die natürliche Zahlenreihe kann man veranschaulichen durch das Bild einer geraden Linie, auf welcher in gleichen Abständen von einander eine Reihe von Punkten angenommen sind; die auf einander folgenden Punkte stellen die einzelnen Zahlen vor. Zu dieser Zahlenlinie, die sich von Null aus aufwärts ins Unendliche erstreckt, kann man sich nun dem Vorhergehenden zufolge eine zweite denken, die von Null aus in entgegengesetzter Richtung verläuft; die so gedachte Zahlenlinie stellt in den gleich weit abstehenden Punkten derselben die Reihe der negativen Zahlen vor. — Jeden Übergang in diesen Reihen von einer Zahl zur andern kann man einen Schritt nennen. Dieser Übergang ist in doppelter Weise ausführbar; wie man nämlich von der Null aus entweder aufwärts oder abwärts fortschreiten kann, so kann man auch an jeder andern Stelle der Zahlenreihe in ähnlicher Weise von einer Zahl zur andern entweder im Sinne der positiven oder der negativen Zahlenreihe übergehen. Demgemäß unterscheidet man zwischen einem Schritt im positiven Sinne und einem Schritt im negativen Sinne; so ist der Übergang von + 12 zu + 13, oder von — 9 zu

---

1) Lat. relatīvus, beziehlich. 2) Lat. absolūtus, beziehungslos.

— 8 ein Schritt im positiven Sinne; dagegen der Übergang von + 13 zu + 12, oder von — 8 zu — 9 ein Schritt im negativen Sinne.

8) Es gibt eine gewisse Art von Größen, welche durch stete Verminderung über einen bestimmten Null- oder Grenzpunkt hinaus in Größen eines andern Namens (einer andern Art, in die ihres Gegenteiles, Gegensatzes) übergehen, ganz ebenso wie die negativen Zahlen aus den positiven durch ein stetes Abziehen, durch eine stete Verminderung über Null entstehen. So geht durch stetes Abnehmen Vermögen in Schulden, Gewinn in Verlust, Überfluß in Mangel, Wärme in Kälte u. s. w. über. Zwei verschieden benannte Größen, von denen die eine durch stete Verminderung über einen gemeinsamen Grenz- oder Nullpunkt hinaus in die andere übergeht, heißen in Bezug auf diesen gemeinsamen Nullpunkt entgegengesetzte Größen. Die eine davon heißt positiv, die andere negativ.

Es ist nun unsere Aufgabe, die vier Species mit Buchstaben unter Berücksichtigung der algebraischen Zahlen durchzuführen. Neben den Buchstaben werden jedoch auch Zahlen benützt. Hiedurch soll dem Anfänger das Auffassen der zu entwickelnden Gesetze erleichtert werden, zugleich sollen die in Zahlen gegebenen Beispiele auch dazu dienen, dem Schüler zu zeigen, daß die vom gewöhnlichen Rechnen her bekannten Mechanismen des Verfahrens die Folgen allgemeiner Gesetze sind.

§. 10. **Addition.**

a) Begriff der Addition.

1) Addieren[1]) heißt, zwei oder mehrere entweder gleichartige oder entgegengesetzte Zahlen zu einer einzigen Zahl vereinigen.[2]) Die zu addierenden Zahlen werden Summanden, Posten oder Glieder genannt, und die zu bestimmende Zahl heißt die Summe oder algebraische Summe von jenen.

2) Der Absatz 7 des vorigen §. legt folgende Definition nahe, aus welcher sich unmittelbar die Gesetze des Addierens ergeben: Addieren heißt, in der allgemeinen Zahlenreihe von Null aus um so viele Schritte und in demjenigen Sinne fort-

1) Lat. addĕre, hinzufügen, zusammenzählen; v. ad, zu und dare, geben.

2) Man vergleiche mit dieser Definition die, welche die spezielle Arithmetik aufzustellen pflegt: addieren heißt, zwei oder mehrere Zahlen zu einer einzigen vereinigen, welche so viele Einheiten hat, als die gegebenen Zahlen zusammen.

gehen, wie die gegebenen Zahlen durch ihren Zahlenwert und ihr Vorzeichen angeben. Diejenige Zahl, zu welcher man auf diese Weise gelangt, heißt die Summe der gegebenen. Hiernach bedeutet $(+4) + (-2) + (+6) + (-3)$:[1]) man soll von Null aus in der allgemeinen Zahlenreihe zuerst nach der positiven Seite hin um 4 Einheiten, von hier aus gegen die negative Zahlenreihe um 2 Einheiten, sodann von da aus gegen die positive Seite um 6 Einheiten und endlich von der letzteren Stelle aus gegen die negative Seite hin um 3 Einheiten fortschreiten. Die Entfernung der letzteren Stelle von der Null drückt alsdann das Resultat aus. Dies ist in dem vorliegenden Falle $+ 5$.

b) Das Kommutationsgesetz[2]) der Addition.

Bei der Bildung einer Summe kann die Aufeinanderfolge der Glieder willkürlich gewählt werden; oder mit andern Worten: Die Glieder einer Summe dürfen ihre Plätze wechseln.

Es ist also $(+a) + (+b) = (+b) + (+a)$, oder $(+a) + (+b) + (+c) = (+b) + (+c) + (+a) = (+c) + (+a) + (+b) = (+a) + (+c) + (+b)$ u. s. w.

c) Das Associationsgesetz[3]) der Addition.

Es ist gleichgültig, in welcher Weise die Glieder einer Summe gruppiert, das heißt zu besondern Gruppen zusammengefaßt werden, und umgekehrt: Eine Summe von Summen ist gleich der Summe aus den Gliedern der letzteren.

Es ist also $(+a) + (+b) + (-c) = [(+a) + (+b)] + (-c) = (+a) + [(+b) + (-c)]$.

Die unter b) und c) angeführten Sätze werden gewöhnlich als Grundsätze hingestellt, da sie ganz innig mit den Begriffen von Zahl und Summe zusammenhängen.

---

1) Man lese: plus 4 und minus 2, und plus 6 und minus 3. Die Plus- und Minuszeichen vor den Gliedern innerhalb der Klammern sind die Vorzeichen, die Pluszeichen zwischen den Gliedern dagegen sind Additionszeichen. 2) Lat. commutatĭo, f., Vertauschung, Veränderung; v. commutāre, vertauschen, verwechseln. 3) Lat. associatĭo, f., Verbindung, Gesellung; v. associāre, sich vereinigen, sich zugesellen.

d) Folgerungen aus den Sätzen unter a, b und c.

1. **Die Summe von zwei gleichen entgegengesetzten Zahlen ist Null.**

Begründung. Zählt man von Null zuerst um eine gewisse Anzahl von Einheiten entweder auf- oder abwärts und dann um eben so viele Einheiten in entgegengesetztem Sinne zurück, so kommt man wieder bei Null an, also $(+ 8) + (- 8) = 0$.

2. **Der Wert einer Zahl ändert sich nicht, wenn man sie zu Null oder Null zu ihr addiert.**

Also $0 + (- a) = - a$; $(+ b) + 0 = + b$.

3. **Gleichartige Zahlen werden addiert, indem man der Summe ihrer absoluten Zahlenwerte das gemeinschaftliche Vorzeichen gibt.**

Behauptung: $(+ 9) + (+ 6) + (+ 18) = + 33$;
$(- 6) + (- 7) + (- 10) = - 23$.

Begründung: $(+ 9) + (+ 6) + (+ 18)$ bedeutet: man soll von Null aus zuerst um 9 Einheiten, von hier aus um 6 Einheiten und von der letzteren Stelle aus noch um 18 Einheiten im positiven Sinne fortschreiten. Führt man dies aus, so kommt man bei 33 über Null an. Also ist $(+ 9) + (+ 6) + (+ 18) = + 33$. Was bedeutet $(- 6) + (- 7) + (- 10)$ und warum muß das Resultat $- 23$ sein?

Veranschaulichung: 9 *M* und 6 *M* und 18 *M* Vermögen sind zusammen 33 *M* Vermögen; 6 *M* und 7 *M* und 10 *M* Schulden sind zusammen 23 *M* Schulden.

4. **Entgegengesetzte Zahlen werden addiert, indem man zunächst alle gleichartigen Zahlen addiert, sodann die kleinere Summe von der größeren subtrahiert und schließlich der entstandenen Differenz das Vorzeichen der größeren Summe gibt.**

Behauptung: $(+ 9) + (- 6) + (+ 12) + (- 2) = + 13$;
$(+ 6) + (- 10) + (+ 5) + (- 12) = - 11$.

Begründung: Da die Glieder einer Summe ihre Plätze wechseln dürfen, so kann der Ausdruck $(+ 9) + (- 6) + (+ 12) + (- 2)$ auch so angeordnet werden: $(+ 9) + (+ 12) + (- 6) + (- 2)$; derselbe bedeutet nun: man soll von Null aus um 9 und 12 Einheiten aufwärts und von der so erhaltenen Stelle aus um 6 und 2 Einheiten abwärts fortschreiten. Da man auf diese Weise bei 13 über Null an-

kommt, so ist (+ 9) + (— 6) + (+ 12) + (— 2) = + 13. Ähnlich ist die Begründung des zweiten Beispiels.

Veranschaulichung: 9 ℳ Vermögen und 6 ℳ Schulden und 12 ℳ Vermögen und 2 ℳ Schulden geben ein Vermögen von 13 ℳ; 6 ℳ Vermögen und 10 ℳ Schulden und 5 ℳ Vermögen und 12 ℳ Schulden geben zusammen 11 ℳ Schulden.

5. Anstatt eine Zahl zu einer Summe zu addieren, kann man diese Zahl auch zu einem Gliede der Summe und das Ergebnis zu dem andern Gliede hinzufügen.

Also: [(+ 9) + (— 5)] + (+ 10) = (+ 9) + [(— 5) + (+ 10)] = [(+ 9) + (+ 10)] + (— 5) = + 14. (Man vergleiche Satz c).

6. Anstatt eine Summe zu einer Zahl zu addieren, kann man auch die Glieder der Summe nacheinander zu dieser Zahl addieren.

Also (+ a) + [(+ b) + (+ c)] = [(+ a) + (+ b)] + (+ c) = [(+ a) + (+ c)] + (+ b). (Man vergleiche Satz c).

e) Begriff: Koëfficient.

Um anzudeuten, daß eine und dieselbe Zahl mehrmals als Summand steht, setzt man dieser Zahl eine andere, welche angibt, wie oft jene als Posten vorhanden ist, unmittelbar voran und schreibt also 3a statt a + a + a, oder 3abc statt abc + abc + abc. Die dem (durch Buchstaben bezeichneten) gleichen Summanden vorgesetzte Zahl heißt der Koëfficient[1]) desselben. Unter Koëfficient einer Buchstabengröße versteht man demnach die vor derselben stehende, meist bestimmte Zahl, welche angibt, wie oft diese Buchstabengröße als Summand vorhanden ist. Der Koëfficient 1 wird nicht gesetzt; man schreibt also a statt 1a. Glieder, welche dieselben Buchstaben in derselben Verbindung haben, heißen gleichnamig, z. B. 4abc und 6abc.

f) Addition von Buchstabengrößen, die Koëfficienten haben.

Gleichnamige Buchstabengrößen werden addiert, indem man ihre Koëfficienten addiert und die erhaltene

---

1) Vom lat. con (vor einem Vokal co), mit, zusammen, und efficĕre, bewirken; soviel als Mitwirker, Mitmehrer.

Summe der gemeinschaftlichen Buchstabengröße als Koëfficient beisetzt.

Beweis: Es ist $3a = a + a + a$ und $2a = a + a$; mithin $3a + 2a = a + a + a + a + a$; hiefür kann man setzen $5a$; also ist $3a + 2a = 5a$. Haben die zu addierenden Glieder verschiedene Buchstaben, so kann die Addition nur angedeutet werden; hiernach ist also $4a$ und $3b = (4a + 3b)$. Daß $4a + 3b$ nicht etwa gleich $7ab$ oder $7(a + b)$ ist, folgt unmittelbar aus der Bedeutung des Koëfficienten 7 dieser Ausdrücke.

Beispiele: 1) $4a + 5a = 9a$.
2) $5b + 8b + 10b$*) $= 23b$. 3) $10a + (-7a) = 3a$.
4) $(-8m) + (-7m) = -15m$.
5) $(-24x) + (+18x) = -6x$.
6) $7m + m + m = 9m$.
7) $4a + 5b + 6c = 4a + 5b + 6c$.
8) $5a - 9b + 6a - 7b - 2a + 5b = 9a - 11b$.
9) $8x - 10y + 20x - 30x + 15y + 6x = 4x + 5y$.
10) $3a^2 + 4a^2 + 7a^2 = 14a^2$ (man vergl. §. 20).

g) Begriff: Polynom.

Eine Zusammenstellung von positiven und negativen Zahlen heißt eine algebraische Summe, oder ein Polynom[1]) (Polynomium), oder ein Aggregat[2]), z. B. $(6a - 3b + 5c)$. Die einzelnen positiven und negativen Zahlen heißen die Glieder des Polynoms. Jedes Glied für sich heißt ein Monom (oder Monomium, zusammengezogen aus Mononomium[3]), eine Verbindung von zwei Gliedern ein Binom[4]) (oder Binomium), von drei Gliedern ein Trinom[5]) (oder Trinomium). So ist z. B. $3ab$ ein Monom,

---

*) Die vor den einzelnen Gliedern dieses Ausdrucks stehenden Zeichen sind Vorzeichen; die Additionszeichen und die Klammern, worein bis jetzt größerer Deutlichkeit halber die einzelnen Glieder geschlossen wurden, kann man weglassen; selbst das Vorzeichen für die an der Spitze stehende Zahl kann wegbleiben, wofern es + ist.

1) Vom griech. polý, viel, und nómos, das Zugeteilte (v. némein, verteilen, zuteilen); soviel als vielteilige, vielgliederige Zahlengröße. 2) Vom lat. aggregāre, beigesellen, zu einer Masse vereinigen. 3) Gr. mónos, einzig. 4) Lat. bis (in Zusammensetzungen bloß bi-), zweimal, doppelt. 5) Griech. u. lat. tri, drei.

4ab — 6cd ein Binom, 8ab — 7cd + 10mn ein Trinom. Binome und Trinome können schon als Polynome bezeichnet werden.

b) Addition von Polynomen.

Wie ein Polynom zu einer Zahl oder zu einem andern Polynom zu addieren ist, folgt aus Satz 6 unter d und aus Satz c. Auch ergibt sich aus letzterem, wie mehrere Polynome zu einander addiert werden. Kommen unter den einzelnen Gliedern derselben gleichnamige vor, so kann man dieselben zusammenfassen. In diesem Falle schreibt man am bequemsten die gleichnamigen Glieder vertikal unter einander und addiert sodann.

Beispiele: 1) $18a + (12a + 4b) = 30a + 4b$.

2) $(4m + 6n - 9p) + (12m - 3n + 16p) = 16m + 3n + 7p$.

3) $(-10x + 8y - 20z) + (8x - 12y) + (-10z - 30y + 100x) = 98x - 34y - 30z$.

4) $(7a - 8b + 5c) + (-9a + 11b - 13c) + (-20a + 24b - c) + (-2a - 3b + 7c) + (30a - 9c) =$

$$\begin{array}{rrr} 7a & -\ 8b & +\ 5c \\ -\ 9a & +\ 11b & -\ 13c \\ -\ 20a & +\ 24b & -\ c \\ -\ 2a & -\ 3b & +\ 7c \\ 30a & & -\ 9c \\ \hline 6a & +\ 24b & -\ 11c. \end{array}$$

Anmerkung. Um sich von der Richtigkeit einer Auflösung durch bestimmte Zahlen zu überzeugen, setze man sowohl in die gegebenen Ausdrücke der Aufgabe als in das Resultat derselben ganz beliebige bestimmte Zahlen und sehe zu, ob in beiden Fällen für die Ausdrücke gleiche Zahlen erscheinen. Hiebei vergesse man nicht, daß z. B. 24ab nicht 24 + a + b, sondern 24 . a . b bedeutet.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, 3. Aufl., §. 1.

§. 11. Subtraktion.

a) Begriff der Subtraktion.

1) Von einer Zahl a eine andere Zahl b subtrahieren[1])

1) Lat. sub-trahĕre (eigentl. darunter wegziehen), abziehen, wegnehmen.

heißt, eine Zahl suchen, welche zur Zahl b addiert als Summe die Zahl a gibt.[1]) Die Zahl a, von welcher subtrahiert wird, heißt Minuend[2]), die Zahl b, welche subtrahiert wird, Subtrahend und die gefundene dritte Zahl Differenz, Unterschied oder Rest.

2) Um die Zahl, welche zum Subtrahend addiert werden muß, damit sich der Minuend ergibt, zu finden, schreitet man vom Subtrahend aus in der allgemeinen Zahlenreihe in einem solchen Sinne fort, daß man dadurch den Minuend erreicht; die Anzahl der auf diese Weise zurückgelegten Schritte gibt den absoluten Zahlenwert und der Sinn des Fortschreitens (§. 9, 7) das Vorzeichen der Differenz. Hiernach ist: $(+ 9) - (+ 6) = + 3$; denn um von $+ 6$ zu $+ 9$ zu gelangen, muß man 3 Schritte, und zwar im positiven Sinne machen; $(+ 9) - (+ 12) = - 3$; denn um von $+ 12$ zu $+ 9$ zu gelangen, müssen 3 Schritte im negativen Sinne gemacht werden; $(- 12) - (- 16) = + 4$; denn beim Fortschreiten von $- 16$ zu $- 12$ muß man 4 Schritte im positiven Sinne machen.

3) Bei der Ausführung dieses Verfahrens macht man die Wahrnehmung, daß die Zahl, welche zum Subtrahend addiert den Minuend gibt, auch erhalten wird, indem man das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addiert. Daher kann man über das Subtrahieren auch die folgende Definition aufstellen: Subtrahieren heißt, das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addieren.

Veranschaulichende Beispiele: Statt jemandem 50 ℳ Vermögen zu nehmen, kann man ihm 50 ℳ Schulden (die Verpflichtung so viel zu bezahlen) geben; statt ihm 50 ℳ Schulden abzunehmen, kann man ihm 50 ℳ Vermögen (die Schulden damit selber zu zahlen) geben.

b) Folgerungen aus den vorstehenden Definitionen.

1. Die Subtraktion führt man aus, indem man das Vorzeichen des Subtrahendus in das entgegengesetzte verwandelt und ihn dann zum Minuend addiert.

---

1) In der bestimmten Arithmetik pflegt man diesen Begriff so zu definieren: Subtrahieren heißt, von einer gegebenen Zahl so viele Einheiten wegnehmen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat.
2) Oder Minuendus, die zu vermindernde Zahl (vom lat. minuĕre, vermindern).

Beispiele: 1) $(+70) - (+30) = 40$; denn $(+70) - (+30) = (+70) + (-30) = 40$.

2) $(+60) - (-30) = 90$; denn $(+60) - (-30) = (+60) + (+30) = 90$.

3) $(-4) - (+1) = -5$; denn $(-4) - (+1) = (-4) + (-1) = -5$.

4) $(-9) - (-8) = -1$; denn $(-9) - (-8) = (-9) + (+8) = -1$.

5) $(+9a) - (+4a) = 5a$; denn $(+9a) - (+4a) = (+9a) + (-4a) = 5a$.

6) $(12a) - (-6a) = 18a$; denn $(12a) - (-6a) = (12a) + (+6a) = 18a$.

7) $(-13a) - (+14a) = -27a$; denn $(-13a) - (+14a) = (-13a) + (-14a) = -27a$.

8) $(-15a) - (-6a) = -9a$; denn $(-15a) - (-6a) = (-15a) + (+6a) = -9a$.

2. Eine algebraische Summe wird von einem Ausdrucke subtrahiert, indem man ihre Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen zu demselben addiert; denn die Glieder einer algebraischen Summe sind positive oder negative Summanden, und für diese gilt der Satz, daß sie mit entgegengesetzten Vorzeichen addiert werden.

Beispiele: 1) $6a - (4a + 5b) = 2a - 5b$; denn $6a - (4a + b) = 6a + (-4a - 5b) = 2a - 5b$.

2) $30x - (-6x - 7y + 8z) = 36x + 7y - 8z$.

3) $a - (-b + c - d) = a + b - c + d$.

4) $(4a - 5b + 6c - 8d) - (-5a + 8b - 5c + 10d) = 9a - 13b + 11c - 18d$; denn $(4a - 5b + 6c - 8d) - (-5a + 8b - 5c + 10d) = (4a - 5b + 6c - 8d) + (+5a - 8b + 5c - 10d) = 9a - 13b + 11c - 18d$.

Eine Aufgabe der letzteren Art kann man zweckmäßig so anordnen:

$$\begin{array}{rrrr} 4a & -\ 5b & +\ 6c & -\ 8d \\ -\ 5a & +\ 8b & -\ 5c & +\ 10d \\ (+) & (-) & (+) & (-) \\ \hline 9a & -\ 13b & +\ 11c & -\ 18d. \end{array}$$

3. Die Subtraktion ist fortan überflüssig, kann also in der Arithmetik nun ganz ausfallen und immer durch eine Addition des Entgegengesetzten ersetzt werden; es ist nämlich $a - (+b)$ oder $a - b = a + (-b)$. Mithin ist auch $a - b - c + d - e$

$= (+ a) + (- b) + (- c) + (+ d) + (- e)$, d. h. die Zeichen + und — sind Vorzeichen, die einzelnen Glieder also positive und negative Summanden; das Additionszeichen wird weggelassen.

c) Klammerregeln.

Die zu addierenden oder zu subtrahierenden algebraischen Summen müssen in Klammern eingeschlossen werden. Diese fallen mit der Ausführung der angezeigten Addition und Subtraktion weg. Betrachtet man die hiebei erhaltenen Resultate genauer, so findet man, daß bei der Addition einer algebraischen Summe lediglich die Klammer wegfällt, die Vorzeichen der einzelnen Glieder aber dieselben bleiben, während bei der Subtraktion einer algebraischen Summe jedem einzelnen Gliede derselben das entgegengesetzte Vorzeichen gegeben wird, nachdem man die Klammer und das vor ihr stehende Zeichen — weggelassen hat. Man merke sich daher folgende zwei Regeln: **Steht ein + vor einer Klammer, welche eine algebraische Summe umschließt, so kann man die Klammer ohne weiteres weglassen; steht dagegen ein — vor einer Klammer, welche eine algebraische Summe umschließt, so läßt man die Klammer und das Zeichen — vor derselben weg und gibt jedem Gliede in derselben das entgegengesetzte Vorzeichen.** Aus der letzteren Regel folgt unmittelbar die weitere: **Sollen Glieder in eine Klammer gebracht werden, vor welcher ein — steht, so muß man vorher die Zeichen derseben in die entgegengesetzten verwandeln.**

Beispiele: 1) $24a + (-3a + 4b - 5c) = 24a - 3a + 4b - 5c = 21a + 4b - 5c$.

2) $24a - (-3a + 4b - 5c) = 24a + 3a - 4b + 5c = 27a - 4b + 5c$.

3) $30m + (5m + (4m - 5n) - 3m) = 30m + (5m + 4m - 5n - 3m) = 30m + 5m + 4m - 5n - 3m = 36m - 5n$.

4) $30m - (5m - (4m - 5n) - 3m) = 30m - (5m - 4m + 5n - 3m) = 30m - 5m + 4m - 5n + 3m = 26m - 5n$.

5) $20 - (3 - (4 + 5) - 6 - (9 + 8)) = 20 - (3 - 4 - 5 - 6 - 9 - 8) = 20 - 3 + 4 + 5 + 6 + 9 + 8 = 49$.

6) $16a + (3b - 2c) - (7a + (2b - 5c) - (9b + 8c)) =$
$16a + 3b - 2c - (7a + 2b - 5c - 9b - 8c) =$
$16a + 3b - 2c - 7a - 2b + 5c + 9b + 8c =$
$9a + 10b + 11c.$

Kommen in einer Klammer neue Klammern vor, so löse man zuerst die inneren und dann die äußeren auf.

d) Anmerkung.

In vielen Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik kommen bei Behandlung der Subtraktion Lehrsätze über folgende Punkte zur Besprechung: wie man Summen und Differenzen subtrahiert und wie von Summen und Differenzen zu subtrahieren ist, ferner wie Differenzen zu addieren und endlich wie sie zu subtrahieren sind. Die folgenden Gleichungen drücken diese Beziehungen aus:

1) $a - (b + c) = (a - b) - c = (a - c) - b.$
2) $a - (b - c) = (a - b) + c = (a + c) - b.$
3) $(a + b) - c = a + (b - c) = b + (a - c).$
4) $(a - b) - c = a - (b + c) = (a - c) - b.$
5) $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$
6) $(a - b) - (c - d) = (a - c) - (b - d).$

In Worten ausgedrückt: 1) Statt eine Summe zu subtrahieren, kann man nach einander jeden Summanden subtrahieren, z. B. $100 - (20 + 4) = (100 - 20) - 4 = 80 - 4 = 76$, oder $(100 - 4) - 20 = 96 - 20 = 76$.

2) Anstatt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahieren, kann man auch ihren Minuend subtrahieren und den Subtrahend addieren, in beliebiger Folge dieser beiden Operationen, z. B. $844 - 97 = 844 - (100 - 3) = 844 - 100 + 3 = 744 + 3 = 747$, oder $875 - 196 = 875 - (200 - 4) = 875 - 200 + 4 = 675 + 4 = 679$; man benützt also, wie diese Beispiele zeigen, den Satz 2 um Zahlen wie 97, 197, 289 und ähnliche Zahlen zu subtrahieren, man faßt dieselben nämlich als die Differenzen $100 - 3$, $200 - 3$, $300 - 11$ auf.

3) Anstatt eine Zahl von einer Summe zu subtrahieren, kann man auch die Zahl zuerst von dem einen Summanden subtrahieren. Von diesem Satze macht man beim Rechnen in Beispielen folgender Art Gebrauch: $49 - 8 = (40 + 9) - 8 = 40 + (9 - 8) = 40 + 1 = 41$, oder $954 - 33 = (900 + 54) - 33 = 900 + (54 - 33) = 921$ u. s. w.

Die Richtigkeit der vorstehenden Gleichungen ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen über Addition und Subtraktion der entgegengesetzten Zahlen in Verbindung mit den Sätzen b) und c) in §. 10, und zwar ganz allgemein.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Sammlung von Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra, 3. Auflage, §. 2.[1])

§. 12. Multiplikation.

a) Begriff der Multiplikation.

1) Eine absolute Zahl a mit einer absoluten Zahl b multiplicieren[2]) heißt, a so viel mal als Teil oder Summanden setzen, als b Einheiten enthält. Die Zahl a heißt Multiplikand, b Multiplikator und das Ergebnis der Multiplikation das Produkt[3]). Multiplikand und Multiplikator heißen

---

1) Das Interesse der Schüler für den mathematischen Unterricht wächst mit deren Einsicht in die Nützlichkeit desselben. Es ist daher nötig, daß man beim Unterricht die Anwendung, den Zweck der mathematischen Lehren durchblicken läßt. Dies ist schon auf dieser Stufe des Unterrichts möglich, nämlich dadurch, daß man dem Schüler zeigt, wie er mit den bereits erworbenen Kenntnissen leichte Bestimmungsgleichungen auflösen kann. Nach einer kurzen Belehrung über das Wesen der Bestimmungsgleichungen, ihre Auflösung und Bildung nach §. 41 und 43 dieses Lehrbuchs kann man daher die Gleichungen unter I, a und b, in §. 31 der Aufgabensammlung auflösen und verschiedene Textaufgaben in §. 32 der Aufgabensammlung durch Gleichungen berechnen lassen. Ja man kann sogar schon die in §. 33 unter I, a, von 1—12 enthaltenen Gleichungen mit 2 Unbekannten, sowie die leichteren Aufgaben in §. 34 zur Übung benützen, wenn man zur Entfernung der Unbekannten die Additions- und Subtraktionsmethode anwendet. Man wird finden, daß die Auflösung von Bestimmungsgleichungen das Interesse der Schüler belebt und erhöht, da sie denselben Gelegenheit bietet, ihre Kraft zu erproben. — In der Folge wird an verschiedenen Stellen auf diejenigen Gleichungen verwiesen werden, die auf der betreffenden Unterrichtsstufe aufgelöst werden können. Hiedurch läßt sich neben dem eben angeführten Zweck auch noch der erreichen, daß die Aufgaben mehr nach ihrem inneren Zusammenhange und nach Graden der Schwierigkeit angeordnet werden.
2) Lat. multiplicāre, vervielfältigen (multus, viel, plicare, falten). 3) Vom lat. pro-ducĕre, hervorbringen, also soviel als Ergebnis.

mit einem gemeinschaftlichen Namen Faktoren. [1]) Die Multiplikation der Zahl a mit der Zahl b deutet man an durch a × b, a · b oder ab (gelesen: „a multipliciert mit b," kürzer „a mal b"; letzteres soll heißen a b mal genommen). Es wird also der Multiplikand vorangestellt; nur wenn der Multiplikator eine bestimmte, der Multiplikand eine allgemeine Zahl ist, pflegt man den ersteren unter dem Namen Koëfficient voranzustellen, z. B. in 3a.

2) Der obigen Definition zufolge läßt sich jedes Produkt darstellen als eine Summe aus lauter gleichen Summanden, von denen der einzelne gleich ist dem Multiplikand; hiernach ist also $3 \cdot 4 = 3 + 3 + 3 + 3$ und $ab = a + a + a \ldots b$ mal (die Punkte .... sind das Zeichen für „und so weiter bis").

3) Für algebraische Zahlen erleidet obige Definition folgende Erweiterung: Multiplicieren heißt, wenn der Multiplikator positiv ist, den Multiplikand selbst, wenn aber der Multiplikator negativ ist, das Entgegengesetzte des Multiplikandus so viel mal als Teil setzen, als der Zahlenwert des Multiplikators angibt.

b) Gesetze über die Multiplikation algebraischer Zahlen.

Der gegebenen Definition gemäß ist: 1) $(+ a) \cdot (+ b) = + ab$; das heißt, zwei positive Zahlen, mit einander multipliciert, geben ein positives Produkt.

2) $(- a) \cdot (+ b) = - ab$; das heißt, eine negative Zahl, mit einer positiven multipliciert, gibt ein negatives Produkt.

3) $(+ a) \cdot (- b) = - ab$; das heißt, eine positive Zahl, mit einer negativen multipliciert, gibt ein negatives Produkt.

4) $(- a) \cdot (- b) = + ab$; das heißt, das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv.

Man pflegt diese vier Sätze in folgendes Gesetz zusammenzufassen: Gleiche Zeichen der Faktoren geben für das Produkt das Zeichen +, ungleiche Zeichen geben —, oder noch kürzer: Gleiche Zeichen geben +, ungleiche —.

---

1) Vom lat. facĕre, machen, bewirken, also eigentl. Macher, soviel als Vervielfältiger.

Bemerkung zu vorstehenden Sätzen. 1) (+ a) · (+ b) bedeutet, daß, da der Multiplikator (+ b) positiv ist, der Multiplikand + a im wirklichen oder direkten Sinne b mal als Teil zu setzen ist. Das Resultat ist also + ab.

2) Da in dem Produkte (— a) · (+ b) der Multiplikator positiv ist, so stellt dasselbe die Forderung, den Multiplikand — a im direkten Sinne b mal als Summand zu setzen; also (— a) · (+ b) = (— a) + (— a) + (— a) + ... b mal. Dies gibt aber — ab.

3) In dem Produkte (+ a) · (— b) ist der Multiplikator (— b) negativ; es bezeichnet daher, daß der positive Multiplikand (+ a) im inversen (entgegengesetzten) Sinne b mal als Summand gesetzt werden soll; das Resultat ist also — ab.

4) Das Produkt (— a) · (— b) hat, da der Multiplikator negativ ist, folgenden Sinn: der negative Multiplikand soll im inversen Sinne aufgefaßt b mal als Summand gesetzt werden; das Resultat ist also + ab.

Das Vorstehende legt folgende Definition der Multiplikation algebraischer Zahlen nahe: Multiplicieren heißt, das Produkt so aus dem Multiplikand entstehen lassen, wie der Multiplikator durch wiederholtes Setzen der positiven Einheit oder eines Teiles derselben oder durch wiederholtes Setzen der Entgegengesetzten der positiven Einheit oder eines Teiles derselben entstanden gedacht werden kann.

Sehr einfach ergibt sich das Gesetz über die Vorzeichen bei der Multiplikation aus folgender Überlegung: Wenn in dem Produkte a · b der Multiplikator b um eine Einheit abnimmt, so nimmt das Produkt ab um a Einheiten ab, d. h. es rückt in der allgemeinen Zahlenreihe um a Stellen von der positiven Seite nach der negativen (von oben nach unten). Wird b zu Null, so wird das Produkt Null. Rückt nun b noch weiter nach unten, d. h. ins Negative, so kommt auch das Produkt ins Negative, denn es muß mit abnehmendem Multiplikator um je a Einheiten abwärts schreiten. Daher ergibt ein negativer Multiplikator ein negatives Produkt. Ist a negativ, so rückt während der Multiplikator b abnimmt, also in der Zahlenreihe abwärts steigt, das Produkt ab aufwärts (in der negativen Zahlenreihe nach oben). Wird b zu Null, so ist auch das Produkt Null. Bewegt sich b noch weiter nach unten, also ins Negative, so muß das Produkt immer um je a Einheiten auf-

wärts rücken, also ins Positive kommen. Folglich muß das Produkt zweier negativer Faktoren positiv werden. Das Gesagte wird vielleicht an folgenden Beispielen noch klarer:

1) $(+4)\cdot(+3) = +12$,	2) $(-4)\cdot(+3) = -12$,
$(+4)\cdot(+2) = +8$,	$(-4)\cdot(+2) = -8$,
$(+4)\cdot(+1) = +4$,	$(-4)\cdot(+1) = -4$,
$(+4)\cdot 0 = 0$,	$(-4)\cdot 0 = 0$,
$(+4)\cdot(-1) = -4$,	$(-4)\cdot(-1) = +4$,
$(+4)\cdot(-2) = -8$,	$(-4)\cdot(-2) = +8$,
$(+4)\cdot(-3) = -12$	$(-4)\cdot(-3) = +12$
u. s. w.	u. s. w. [1]).

c) Das Kommutationsgesetz der Multiplikation.

Der Wert eines Produkts bleibt ungeändert, wenn Multiplikand und Multiplikator desselben mit einander vertauscht werden.

Beweis. Die Richtigkeit des soeben ausgesprochenen Satzes soll zunächst für zwei bestimmte Zahlen, z. B. $3 \cdot 4$ gezeigt werden. Es ist also zu beweisen, daß $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ ist. Zu dem Zwecke zerfällen wir den Multiplikand in seine 3 Einheiten und setzen diese 3 Einheiten 4 mal hin, nämlich:

---

1) Der Satz, daß bei der Multiplikation *gleiche Zeichen* +, *ungleiche* — *geben*, läßt sich durch ein Zahlenbeispiel auch in folgender Weise erläutern. Es sei z. B. $7-5$ ($= 2$) mit $9-6$ ($= 3$) zu multiplicieren, in Zeichen also: $(7-5) \,.\, (9-6)$. Man nimmt nun den Multiplikand erst 9 mal, also $(7-5) \,.\, 9$; das gibt $63-45$; denn nimmt man zunächst $7 \,.\, 9$, was 63 ist, so hat man, da nicht das 9fache von 7, sondern von $7-5$ zu nehmen ist, $5 \,.\, 9 = 45$ zu viel genommen; man muß mithin von 63 die Zahl 45 subtrahieren. Der Multiplikand $7-5$ soll aber nicht 9 mal, sondern $(9-6)$ mal genommen werden, also wurde er 6 mal zu oft genommen; deshalb muß von $(7-5) \,.\, 9 = 63 - 45$ das 6fache von $7-5$, also $(7-5) \,.\, 6$ subtrahiert werden. Subtrahiert man zunächst $7 \,.\, 6 = 42$, so hat man, da nicht $7 \,.\, 6$, sondern $(7 - 5) \,.\, 6$ subtrahiert werden soll, $5 \,.\, 6 = 30$ zu viel subtrahiert; 30 muß also wieder zu $63 - 45 - 42$ addiert werden; also $63 - 45 - 42 + 30 = 6$. Dasselbe Resultat muß sich ergeben, wenn man $(7-5)$ als $(+7) + (-5)$ und $9-6$ als $(+9) + (-6)$ auffaßt. Es ist dann also $+7 \,.\, +9 = +63$, $-5 \,.\, +9 = -45$, $+7 \,.\, -6 = -42$ und $-5 \,.\, -6 = +30$. In ähnlicher Weise führe man auch das Beispiel $-4 \,.\, -3$ durch, indem man $(0 - 4) \,.\, (0 - 3)$ multipliciert.

$$\begin{array}{r} 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1 \\ + 1 + 1 + 1. \end{array}$$

Nun stehen in horizontaler Reihe 3 Einheiten und solcher Reihen sind 4 vorhanden, und in vertikaler Reihe stehen 4 Einheiten und solcher Reihen sind 3 vorhanden. Faßt man nun erst die horizontal neben einander stehenden Einer zu einer Summe (3) zusammen und addiert diese Partialsummen, so ergibt sich 3 · 4. Faßt man aber zuerst die vertikal unter einander stehenden Einer zusammen (4) und addiert diese Partialsummen, so ergibt sich 4 · 3. Diese beiden Ergebnisse sind offenbar der ganzen Summe der hier stehenden Einer und folglich auch einander gleich, denn die Reihenfolge der Summanden ist beliebig. — Da dasselbe für alle anderen Zahlen bewiesen werden kann, so kann man allgemein setzen a · b = b · a.

d) Das Associationsgesetz der Multiplikation.

1) **Wenn drei oder mehrere Zahlen miteinander multipliciert werden sollen, so ist es einerlei, in welcher Ordnung man dieselben multipliciert, oder: die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts ist beliebig.**

Beweis. Es seien zunächst drei Zahlen, a, b und c, mit einander zu multiplicieren. Hiebei soll es nun, wie der Lehrsatz behauptet, einerlei sein, ob man rechnet (a · b) · c, oder (b · a) · c, oder c · (a · b), oder c · (b · a), oder a · (b · c), oder (b · c) · a. Daß (a · b) · c = (b · a) · c = c · (a · b) = c · (b · a) ist, folgt aus Satz c dieses §. Es ist also nur noch zu zeigen, daß auch das Produkt, welches man erhält, wenn man c mit einer der beiden Zahlen a und b multipliciert und das so erhaltene Produkt noch mit der andern dieser Zahlen vervielfacht, jedem der vier vorstehenden Produkte gleich ist. Setzt man statt c eine bestimmte Zahl, z. B. 4, so erhält man statt (a · b) · c das Produkt (a · b) · 4. Dieses ist nach der Erklärung der Multiplikation so viel als a · b + a · b + a · b + a · b. Hiefür kann man setzen a · (b + b + b + b) oder kürzer a · (b · 4), oder a · (4 · b). Es ist also (a · b) · 4 = a · (b · 4) = a · (4 · b). — Da dasselbe für jeden andern Wert von c erwiesen werden kann, so kann man allgemein setzen (a · b) · c = (b · c) · a. Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß bei der Mul=

tiplikation dreier Zahlen die Ordnung der Faktoren beliebig ist. Daher kann man auch die Klammern weglassen und schreiben: $a \cdot b \cdot c = a \cdot c \cdot b = b \cdot a \cdot c = b \cdot c \cdot a = c \cdot a \cdot b = c \cdot b \cdot a$. Für mehr als drei Faktoren kann der Beweis in ähnlicher Weise geführt werden. — Aus diesem Satze ergeben sich nachstehende Folgerungen:

α) Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliciert, indem man einen, beliebig welchen, aber nur einen Faktor multipliciert, also $(ab)c = (ac)b = a(bc)$. Dieses Gesetz findet in der bestimmten Arithmetik bei Aufgaben folgender Art Anwendung: $2300 \cdot 5 = (23 \cdot 100) \cdot 5 = (23 \cdot 5) \cdot 100 = 115 \cdot 100 = 11500$.

β) Eine Zahl wird mit einem Produkte multipliciert, indem man erst mit dem einen Faktor multipliciert und das daraus entstandene Produkt mit dem andern, also $a(mn) = (am)n = (an)m$. Von diesem Gesetze macht man im gewöhnlichen Rechnen folgenden Gebrauch: $432 \cdot 42 = 432 \cdot (7 \cdot 6) = (432 \cdot 7) \cdot 6 = 3024 \cdot 6 = 18144$.

2) Eine gerade Anzahl sowohl positiver als negativer Faktoren gibt ein positives Produkt, eine ungerade Anzahl positiver Faktoren gibt ein positives, eine ungerade Anzahl negativer Faktoren ein negatives Produkt; also $(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$.

Anmerkung. Kommt eine und dieselbe Zahl mehrmals als Faktor vor, so schreibt man sie, kürzerer Schreibweise wegen, nur einmal, und fügt ihr rechts oben eine Zahl bei, welche anzeigt, wie oft die Zahl als Faktor vorhanden ist. Hiernach ist $4 \cdot 4 = 4^2$, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$, oder $a^3 = a \cdot a \cdot a$ (gelesen: „4 hoch 2", „4 hoch 3", „a hoch 3"). Näheres findet sich in §. 20.

e) Multiplikation von Monomen, die Koëfficienten haben.

Monome werden miteinander multipliciert, indem man dem Produkte ihrer Koëfficienten das der einzelnen Buchstaben als Faktor hinzufügt.

Beweis. Jedes Monom besteht aus zwei oder mehreren, teils numerischen, teils litteralen Faktoren. Da nun nach Satz d die Reihenfolge der Faktoren eines Produkts beliebig ist, so darf man die numerischen Faktoren der einzelnen Monome von den Buchstaben-

faktoren absondern und erstere durch ihr Produkt ersetzen, also $3a \cdot 2b = 3 \cdot a \cdot 2 \cdot b = 3 \cdot 2 \cdot a \cdot b = 6ab$, oder $3ab \cdot 5a \cdot 4d = 3 \cdot a \cdot b \cdot 5 \cdot a \cdot 4 \cdot d = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot d = 60a^2bd$. Die Buchstabenfaktoren pflegt man in alphabetischer Ordnung hinzuschreiben.

Beispiele:

1) $4a \cdot 5b = 20ab$. 2) $-3m \cdot 4m = -12m^2$.

3) $8x \cdot -7y = -56xy$. 4) $-5p \cdot -6p = 30p^2$.

5) $3ab \cdot 4bc \cdot 5ac = 60a^2b^2c^2$.

6) $-3xy \cdot -4xy \cdot -5xy = -60x^3y^3$.

f) Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom.

1) Ein Polynom wird mit einem Monom multipliciert, indem man alle Glieder des Polynoms mit dem Monom multipliciert und die Teilprodukte addiert. Man nennt diesen Satz das Distributionsgesetz[1]) der Multiplikation.

Behauptung. $(a + b + c)\,m = am + bm + cm$.

Beweis. Setzt man zunächst statt m eine bestimmte Zahl, z. B. 4, so erhält man $(a + b + c) \cdot 4$. Dem Begriff des Produkts gemäß ist dies $(a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c)$. Da nun Summen addiert werden, indem man die Glieder der einen Summe zu denen der anderen Summe in beliebiger Reihenfolge addiert, so kann der letztere Ausdruck auch so geordnet werden: $a + a + a + a + b + b + b + b + c + c + c + c$. Nun kann man aber setzen: $4a$ statt $a + a + a + a$, $4b$ statt $b + b + b + b$, $4c$ statt $c + c + c + c$. Hiernach erhält man als Produkt $4a + 4b + 4c$. Da dasselbe für jeden andern bestimmten Faktor bewiesen werden kann, so kann man allgemein setzen $(a + b + c)\,m = am + bm + cm$. — Allgemein ausgeführt, heißt der Beweis: $(a + b + c)m = (a + b + c) + (a + b + c) + (a + b + c) \ldots\ldots m$ mal $= (a + a + a \ldots\ldots m$ mal$) + (b + b + b \ldots m$ mal$) + (c + c + c \ldots\ldots m$ mal$) = am + bm + cm$, w. z. b. w.

1) Distribution, f. (lat. distributĭo), Austeilung, v. distribuĕre, verteilen. Der Name kommt daher, weil sich nach diesem Gesetze ein Faktor, der bei einer Summe vorkommt, gewissermaßen auf die einzelnen Glieder verteilt. Der nachfolgende Satz g ist eine Erweiterung des Distributionsgesetzes.

Beispiele: 1) $(m + n + p)4 = 4m + 4n + 4p$.

2) $(m - n - p)5 = 5m - 5n - 5p$.

3) $(8a - 6b + 3c - 12d)5a = 40a^2 - 30ab + 15ac - 60ad$.

4) $(-3x + 4y - 6z) \cdot -5x = 15x^2 - 20xy + 30xz$.

5) $62a + (8a + 5b)5 = 62a + 40a + 25b = 102a + 25b$.

6) $40a - (6a - 7b)5 = 40a - 30a + 35b = 10a + 35b$.

7) $10x - 3(2x - 4y) = 10x - 6x + 12y = 4x + 12y$.

8) $20mn - m(n - p) = 20mn - mn + mp = 19mn + mp$.

9) $3a^2 + (3a + 4b)5a - (8a - 7b)6a - (5a - b)2a = 3a^2 + 15a^2 + 20ab - 48a^2 + 42ab - 10a^2 + 2ab = -40a^2 + 64ab$, oder $64ab - 40a^2$.

Erläuterungen: Zu 6. Hier soll $(6a - 7b)5 = (30a - 35b)$ von $40a$ subtrahiert werden, also $40a - (30a - 35b)$, dies gibt: $40a - 30a + 35b$; denn die Subtraktion führt man aus, indem man das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addiert.

Zu 7. Hier ist $3(2x - 4y) = (6x - 12y)$ von $10x$ zu subtrahieren, also; $10x - (6x - 12y)$; dies gibt: $10x - 6x + 12y$. Gleichnamige Glieder, hier $10x - 6x$, können vereinigt werden.

2) Umkehrung des vorigen Satzes. Wird die Gleichung $(a + b + c) m = am + bm + cm$ rückwärts gelesen, so erhält man folgenden Satz: Haben die Glieder eines Polynoms einen gemeinschaftlichen Faktor, so addiert man die ungleichen Faktoren und multipliciert die so gebildete Summe mit dem gemeinschaftlichen Faktor. Dieses Verfahren nennt man die Ausscheidung oder das Absondern eines gemeinschaftlichen Faktors (der Faktor heißt „abgesondert").

3) Anmerkung. Die in den meisten Lehrbüchern der allgemeinen Arithmetik enthaltenen Gesetze über die Multiplikation von Summen und Differenzen mit ganzen Zahlen ergeben sich von selbst aus Satz 1. Diese zwei Gesetze heißen: a) Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliciert und die erhaltenen Produkte addiert, also $(a + b) c = ac + bc$. Von diesem Gesetze macht man beim gemeinen Rechnen folgenden Gebrauch: $74 \cdot 8 = (70 + 4) \cdot 8 = 70 \cdot 8 + 4 \cdot 8 = 560 + 32 = 592$.

b) Eine Differenz wird mit einer Zahl multipliciert,

indem man den Minuend und Subtrahend mit der Zahl multipliciert und das letztere Produkt von dem ersteren subtrahiert, also $(a - b)\,c = ac - bc$. Nach diesem Satze multipliciert man z. B. 97 und 8, nämlich $(100 - 3) \cdot 8 = 100 \cdot 8 - 3 \cdot 8 = 800 - 24 = 776$.

g) Multiplikation eines Polynoms mit einem Polynom.

1) **Ein Polynom wird mit einem Polynom multipliciert, indem man jedes Glied des einen Polynoms mit jedem des andern multipliciert und die Teilprodukte addiert.**

Behauptung. $(3a + 4b)(5c + 6d) = 15ac + 18ad + 20bc + 24bd$.

Beweis. Setzt man zunächst $3a + 4b = p$, so erhält man: $p\,(5c + 6d)$. Dies ist nach Satz f gleich: $5cp + 6dp$. In diesen Ausdruck für p den Wert $3a + 4b$ eingeführt, kommt: $5c\,(3a + 4b) + 6d\,(3a + 4b) = 15ac + 20bc + 18ad + 24bd = 15ac + 18ad + 20bc + 24bd$, w. z. b. w. — Wenn unter den Teilprodukten gleichnamige vorkommen, so schreibt man dieselben untereinander und zieht sie durch Addition zusammen.

Beispiele:

1) $(4m - 5n)(6p + 8q) = 24mp - 30np + 32mq - 40nq$.
2) $(3x^2 + 4y^3)(5z^2 - 3t^5) = 15x^2z^2 - 9x^2t^5 + 20y^3z^2 - 12y^3t^5$.
3) $(3x^2 + 4y^3)(2x^3 - 5y^2) = 6x^5 - 15x^2y^2 + 8x^3y^3 - 20y^5$.
4) $(3a^2 + 6)(5a^2 - 6) = 15a^4 + 30a^2 - 18a^2 - 36 = 15a^4 + 12a^2 - 36$.
5) $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
6) $(3a + 4b)^2 = 9a^2 + 24ab + 16b^2$. (Man vergl. §. 28).
7) $(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$. (Man vergl. §. 28).
8) $(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2) = 9x^4 - 16y^4$.
9) $(a + b + c)^2 = ((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)c + c^2$. (Man vergl. §. 28).
10) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. (Man vergl. §. 29).
11) $(3a + 4b)(2a - 3b) - (5a - b)(7a + 2b) + (6a + 8b)(9a + b) = ?$

Ausmult.: $(6a^2 - ab - 12b^2) - (35a^2 + 3ab - 2b^2) + (54a^2 + 78ab + 8b^2)$;
Kl. gel.: $6a^2 - ab - 12b^2 - 35a^2 - 3ab + 2b^2 + 54a^2 + 78ab + 8b^2$;
Durch Add. vereinigt: $25a^2 + 74ab - 2b^2$.

Erläuterung. Die Ausdrücke der vorstehenden Aufgabe bilden eine algebraische Summe, deren Glieder zusammengesetzte Produkte sind. So nennt man Produkte, in welchen ein Faktor oder mehrere Faktoren algebraische Summen sind. Werden die angedeuteten Operationen ausgeführt, so erhält man eine algebraische Summe, deren Glieder sämtlich einfache Produkte bilden. Da bei der Auflösung derartiger Aufgaben leicht Fehler gemacht werden können, so ist es dem Anfänger zu empfehlen, zunächst die Multiplikationen auszuführen, die erhaltenen Produkte in die entsprechenden Klammern zu schreiben und diese schließlich aufzulösen.

2) Sollen mehr als zwei Polynome miteinander multipliciert werden, so sucht man zuerst das Produkt aus zwei Polynomen, multipliciert das erhaltene Produkt mit dem dritten Polynom u. s. w.

3) Auf dem unter 1. angeführten Satze beruht das Verfahren, welches in der bestimmten Arithmetik bei der Multiplikation zweier mehrstelliger Zahlen eingeschlagen wird, z. B. $85 \cdot 24 = (80 + 5) \cdot (20 + 4) = 80 \cdot (20 + 4) + 5 \cdot (20 + 4)$ u. s. w. oder $97 \cdot 48 = (100 - 3) \cdot (50 - 2) = 100 \cdot (50 - 2) - 3\,(50 - 2)$ u. s. w.

h) Multiplikation der Null mit einer Zahl und mit Null.

1. Ist einer der Faktoren Null, so ist auch das Produkt Null.

Behauptung. $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. Die Null kann als eine Differenz angesehen werden, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, oder als die Summe aus einer Zahl und dem Entgegengesetzten derselben, also kann man z. B. setzen $m - m = 0$. Statt $a \cdot 0$ erhält man daher $a \cdot (m - m) = am - am = 0$.

2. Das Produkt zweier Nullen ist Null (Beweis ähnlich wie bei 1).

Übungsaufgaben.

Aufgabensammlung, §. 3; ferner können aufgelöst werden die Gleichungen in §. 31 unter I, b), sowie leichtere Aufgaben in §. 32. Vergleiche Fußnote auf Seite 26.

§. 13. Division.

a) Begriff der Division.

Eine Zahl a durch eine andere Zahl b dividieren[1]) heißt, eine dritte Zahl suchen, welche mit b multipliciert die Zahl a als Produkt gibt. Die Zahl, welche dividiert werden soll, heißt der Dividend[2]), die Zahl, mit welcher man dividiert, der Divisor und das Resultat der Division der Quotient[3]). Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt oder ein Querstrich; das erstere Zeichen setzt man so, daß der Dividend vor und der Divisor nach demselben steht, also a : b (gelesen: „a dividiert durch b"); wendet man den Querstrich als Divisionszeichen an, so wird über denselben der Dividend und unter ihn der Divisor gesetzt.

b) Folgerungen aus vorstehender Definition.

1. Das Produkt aus dem Divisor und dem Quotienten ist gleich dem Dividend (Probe der Division).

2. Jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt Eins zum Quotienten, also $a : a = 1$; denn $1 \cdot a = a$.

3. Null durch irgend eine Zahl dividiert gibt Null, also $0 : a = 0$; denn $0 \cdot a = 0$.

4. Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie mit einer andern Zahl multipliciert und das erhaltene Produkt wieder durch dieselbe Zahl dividiert, oder wenn man sie mit der nämlichen Zahl dividiert und multipliciert.

5. Der Quotient aus zwei positiven und auch aus zwei negativen Zahlen ist positiv; der Quotient aus einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ. Kürzer ausgedrückt: Gleiche Zeichen (des Dividendus und des Divisors) geben (für den Quotienten) das Vorzeichen +, ungleiche Zeichen geben —.

Demnach ist: 1) $(+ 24) : (+ 4) = + 6$; denn $(+ 6) \cdot (+ 4) = + 24$;

2) $(- 24) : (- 4) = + 6$; denn $(+ 6) \cdot (- 4) = - 24$;

3) $(- 24) : (+ 4) = - 6$; denn $(- 6) \cdot (+ 4) = - 24$.

---

1) Vom lat. dividĕre, teilen, zerteilen. 2) Das zu Teilende. 3) Vom lat. quotĭens oder quotĭes, wie oft? wie vielmal?, also soviel als Teilergebnis.

c) Die zwei Arten der Division.

Die Division ist die umgekehrte Operation der Multiplikation. Daraus folgt, daß die Division entweder darin bestehen kann, aus Produkt und Multiplikator den Multiplikand zu finden, oder darin, aus Produkt und Multiplikand den Multiplikator zu finden. Da der Multiplikator seiner Natur nach unbenannt ist, so muß in dem ersten dieser beiden Fälle der Divisor, der eigentliche Multiplikator, unbenannt sein; der Quotient aber, als Multiplikand, ist gleichbenannt mit dem Dividend, dem Produkt, z. B. 24 *M* : 4 = 6 *M*. Im zweiten Falle dagegen ist der Divisor, als Multiplikand, immer gleichbenannt mit dem Dividendus, dem Produkt, der Quotient aber, als Multiplikator immer unbenannt, z. B. 24 *M* : 4 *M* = 6. In jenem Falle wird der Quotient gefunden, indem man den Dividendus in so viele gleiche Teile teilt, als der Divisor anzeigt (teilende Division, oder Division im Sinne des Teilens); in diesem Falle dagegen, indem man untersucht, wie vielmal sich der Divisor aus dem Dividend heraus nehmen, von ihm subtrahieren lasse, oder wie vielmal der Divisor im Dividend enthalten ist (vergleichende oder messende Division, oder Division im Sinne des Enthaltenseins). Sind Divisor und Dividend unbenannt, so ist die Auffassung der Divisionsaufgabe eine beliebige.

In dem vorliegenden §. wird vorausgesetzt, daß der Divisor im Dividend ohne Rest enthalten sei.

d) Division eines Produkts durch eine Zahl.

Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, indem man einen der Faktoren des Produkts durch diese Zahl dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multipliciert.

Behauptung. $\frac{ab}{m} = \frac{a}{m} \cdot b = a \cdot \frac{b}{m}$.

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $\left(\frac{a}{m} \cdot b\right) \cdot m = ab$ ist. Da die Stellung der Faktoren beliebig ist, so kann man das Produkt $\left(\frac{a}{m} \cdot b\right) \cdot m$ auch so schreiben $\left(\frac{a}{m} \cdot m\right) \cdot b$, und dies ist nach Satz 4. unter b) dieses §. gleich ab. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß $\left(a \cdot \frac{b}{m}\right) \cdot m = ab$ ist.

Beispiele: 1) $\frac{(9x)y}{9} = xy.$

2) $\frac{(12ab)(cde)}{cd} = 12abe.$ 3) $\frac{(49xy)(35xz)}{7x} = 245xyz.$

e) Division durch ein Produkt.

1. **Durch ein Produkt wird dividiert, indem man erst durch den einen Faktor und den entstandenen Quotienten durch den andern Faktor dividiert.**

Behauptung. $\frac{a}{m \cdot n} = \frac{a}{m} : n = \frac{a}{n} : m.$

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $\left(\frac{a}{m} : n\right) \cdot mn = a$ ist.

Da die Ordnung der Faktoren beliebig ist, so kann man statt $\left(\frac{a}{m} : n\right) \cdot mn$ auch setzen $\left(\frac{a}{m} : n\right) \cdot n \cdot m$, und hiefür nach Satz 4. unter b) dieses §. den kürzeren Ausdruck $\left(\frac{a}{m}\right) \cdot m$, was nach demselben Satze $= a$ ist.

Beispiele: Von dem vorstehenden Satze macht man in der bestimmten Arithmetik Gebrauch, wenn eine Zahl durch eine andere, die sich in Faktoren zerlegen läßt, dividiert werden soll, z. B. $216 : 24 = 216 : (6 \cdot 4) = (216 : 6) : 4 = 36 : 4 = 9.$

2. **Ein Produkt wird durch ein Produkt dividiert, indem man durch jeden Faktor des Divisors einen, beliebig welchen, aber nur einen Faktor des Dividend dividiert.** Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus Satz d) und e).

f) Division eines Monoms durch ein Monom.

Zwei Monome werden durch einander dividiert, indem man zunächst die Koëfficienten für sich dividiert, sodann die Buchstabenfaktoren und beide Quotienten als Faktoren neben einander setzt.

Behauptung. $12abmn : 3ab = 4 \cdot mn = 4mn.$

Beweis. Derselbe ist in Satz 2 unter e) dieses §. enthalten. Die Richtigkeit dieses Verfahrens geht einfach auch daraus hervor, daß man

die Faktoren, die Dividend und Divisor gemein haben, weglassen darf, ohne den Wert des Quotienten zu verändern.

Beispiele: 1) $64a^3b^5c^6 : 16a^2b^3c^5 = 4ab^2c$.

2) $15abxy : (-5ab) = -3xy$.

g) Division eines Polynoms durch ein Monom.

Ein Polynom wird durch ein Monom dividiert, indem man jedes einzelne Glied des Polynoms durch das Monom dividiert und die erhaltenen Quotienten addiert.

Behauptung. $(9ab - 12ac + 15ad) : 3a = 3b - 4c + 5d$.

Beweis. Zum Beweise multipliciert man den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor.

Beispiele: 1) $(24ab - 32ac + 40ad) : 8a = 3b - 4c + 5d$.

2) $(14a^3b^2 - 21a^2b^3 + 28ab^4) : -7ab^2 = -2a^2 + 3ab - 4b^2$.

Anmerkung. Aus dem vorigen Satze folgt auch, wie eine zweigliedrige Summe und eine Differenz durch eine Zahl zu dividieren sind. Anwendungen dieser zwei Sätze sowie des vorigen Satzes in der bestimmten Arithmetik sind z. B. $165 : 5 = (150 + 15) : 5 = 150 : 5 + 15 : 5 = 30 + 3 = 33$ oder $297 : 3 = (300 - 3) : 3 = 100 - 1 = 99$.

h) Division eines Polynoms durch ein Polynom.

Um das Verfahren, das bei der Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom einzuschlagen ist, aufzufinden, wollen wir zunächst das Polynom, das wir dividieren wollen, aus zwei Polynomen durch Multiplikation entstehen lassen. Die beiden Polynome seien $(-6a + 9b - 11c)$ und $(3a - 4b + 5c)$. Beide miteinander multipliciert, erhält man:

$$\begin{array}{llllll}
-6a & +9b & -11c & \text{(I. Faktor)} & & \\
3a & -4b & +5c & \text{(II. Faktor)} & & \\
\hline
-18aa & +27ab & -33ac & \text{(1. Teil)} & & \\
 & +24ab & & -36bb & +44bc & \text{(2. Teil)} \\
 & & -30ac & & +45bc & -55cc \text{ (3. Teil)} \\
\hline
-18aa & +51ab & -63ac & -36bb & +89bc & -55cc.
\end{array}$$

Das hier stehende Produkt besteht aus 3 Teilen: der erste Teil enthält das Produkt aus dem I. Faktor und dem ersten Gliede des II. Faktors;

der zweite Teil besteht aus dem Produkte des I. Faktors und dem zweiten Gliede des II. Faktors; den dritten Teil endlich bildet das Produkt aus dem I. Faktor und dem dritten Gliede des II. Faktors. Subtrahiert man daher nach einander von dem obigen Produkte die soeben genannten drei Produkte, so muß man als Rest 0 erhalten. — Das erste Glied des II. Faktors, den wir uns nun als unbekannt denken wollen, wird gefunden, indem man mit dem ersten Gliede des I. Faktors in das erste Glied des obigen Produkts dividiert. Subtrahiert man nun das Produkt aus dem I. Faktor und dem ersten Gliede des gefundenen Quotienten (des II. Faktors), nämlich $-18aa + 27ab - 33ac$ von dem gesamten Produkt, so resultiert als Rest $24ab - 30ac - 36bb + 89bc - 55cc$. Sofort ist ersichtlich, daß man das zweite Glied des zu suchenden Quotienten (des II. Faktors) erhält, wenn man mit dem ersten Gliede des I. Faktors in das erste Glied des Restes dividiert. Wird hierauf das Produkt aus dem I. Faktor und dem zweiten Gliede des Quotienten (des II. Faktors) von dem durch die erste Subtraktion erhaltenen Reste subtrahiert, so bleibt $-30ac + 45bc - 55cc$ übrig. Aus dem ersten Gliede dieses Restes erhält man endlich das dritte Glied des Quotienten (des II. Faktors), indem man dasselbe durch das erste Glied des I. Faktors dividiert. Das Produkt aus dem so erhaltenen Gliede und dem I. Faktor tilgt nunmehr den noch vorhandenen Rest des obigen Produkts. — Diese Darlegung zeigt deutlich das Verfahren, welches bei der Division eines Polynoms durch ein anderes Polynom einzuschlagen ist. Bevor wir dasselbe bestimmt formulieren, wollen wir die vorhin angedeuteten Operationen übersichtlich anordnen:

Dividend — Divisor — Quotient

$(-18aa+51ab-63ac-36bb+89bc-55cc) : (-6a+9b-11c) = 3a-4b+5c$

$-18aa+27ab-33ac$

$(+)\quad(-)\quad(+)$ [1]

$24ab-30ac-36bb+89bc$

$24ab\quad-36bb+44bc$

$(-)\quad(+)\quad(-)$

$-30ac+45bc-55cc$

$-30ac+45bc-55cc$

$(+)\quad(-)\quad(+)$

0

---

1) Subtrahieren heißt, das Entgegengesetzte des Subtrahendus zum Minuendus addieren.

Das hier eingeschlagene Verfahren läßt sich folgendermaßen allgemein ausdrücken:

Polynome werden durch einander dividiert, indem man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors dividiert, den erhaltenen Quotienten mit dem ganzen Divisor multipliciert und das Produkt subtrahiert, hierauf zu dem Reste das nächste Glied oder alle Glieder heruntersetzt und wieder das erste Glied desselben durch das erste Glied des Divisors dividiert u. s. f. Wird endlich, wenn dies Verfahren fortgesetzt wird, der Rest gleich Null, so geht die Division auf.

Bei der Division zweier Polynome durch einander muß jedoch eine wesentliche Vorbedingung erfüllt sein; es müssen nämlich die Glieder beider in einer bestimmten Ordnung auf einander folgen, wenn die Division derselben, falls sie aufgehen kann, auch wirklich aufgehen soll. Diese Ordnung besteht darin, daß man die Glieder beider Polynome nach der Faktorenanzahl eines in beiden vorkommenden gemeinschaftlichen Buchstabens, entweder in absteigender oder aufsteigender Folge, anordnet und diese Ordnung auch in den jedesmaligen Resten befolgt. Die Glieder des Polynoms 10aaab — 7aabb + 18abbb + 24bbbb folgen in absteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl des Buchstabens a auf einander. Soll nun dasselbe durch das Polynom — 3abb + 6bbb + 2aab dividiert werden, so hat man dasselbe ebenfalls in absteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl des Buchstabens a zu ordnen, nämlich so: 2aab — 3abb + 6bbb. Diesen beiden Polynomen ist aber auch noch der Buchstabe b gemein. In Bezug auf diesen sind sie in aufsteigender Reihenfolge der Faktorenanzahl desselben geordnet. Wollte man die Glieder beider Polynome in absteigender Folge der Faktorenanzahl des Buchstaben b ordnen, so müßte man schreiben (24bbbb + 18abbb — 7aabb + 10aaab) : (6bbb — 3abb + 2aab). In beiden Fällen geht die Division auf. Dasselbe ist jedoch nicht der Fall, wenn man die Glieder beider Polynome anders, etwa wie folgt, anordnete: (— 7aabb + 24bbbb + 10aaab + 18abbb) : (6bbb + 2aab — 3abb). Den Grund hievon, sowie die Notwendigkeit der Ordnung der durch einander zu dividierenden Polynome wird man einsehen, wenn man die Entstehung eines Produkts aus zwei geordneten Faktoren genau beobachtet.

Beispiele:

1) $(6a^2 + ab + 10ac - 12b^2 + 15bc) : (2a + 3b) = 3a - 4b + 5c\,.$

$$\begin{array}{l}
6a^2 + 9ab\ ^{1)} \\
\hline
\quad - 8ab + 10ac - 12b^2 \\
\quad - 8ab \qquad\quad\; - 12b^2 \\
\hline
\qquad\qquad 10ac + 15bc \\
\qquad\qquad 10ac + 15bc \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

2) $(x^8 - 16y^8) : (x^2 - 2y^2) = x^6 + 2x^4y^2 + 4x^2y^4 + 8y^6\,.$

$$\begin{array}{l}
x^8 - 2x^6y^2 \\
\hline
\quad + 2x^6y^2 - 16y^8 \\
\quad + 2x^6y^2 - 4x^4y^4 \\
\hline
\qquad\quad + 4x^4y^4 - 16y^8 \\
\qquad\quad + 4x^4y^4 - 8x^2y^6 \\
\hline
\qquad\qquad\quad + 8x^2y^6 - 16y^8 \\
\qquad\qquad\quad + 8x^2y^6 - 16y^8 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0.
\end{array}$$

3) $1 : (1 - b) = 1 + b + b^2 + b^3 \ldots.$

$$\begin{array}{l}
1 - b \\
\hline
\quad + b \\
\quad\; b - b^2 \\
\hline
\qquad + b^2 \\
\qquad\; b^2 - b^3 \\
\hline
\qquad\quad + b^3 \\
\qquad\quad\; b^3 - b^4 \\
\hline
\qquad\qquad + b^4 \ldots.
\end{array}$$

§. 14. Zerlegung in Faktoren, Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes und des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen.

A. Zerlegung in Faktoren.

Die Zerlegung algebraischer Summen in Faktoren besteht darin, daß man diejenigen Faktoren aufsucht und in Form eines Produkts miteinander verbindet, durch deren Multiplikation die betreffende algebraische Summe entstanden ist. Man nennt diese

---

1) Die veränderten Vorzeichen werden von nun an nicht mehr angeschrieben.

Operation auch die Verwandlung eines Polynoms in ein Produkt. Dieselbe ist besonders wichtig, weil auf ihr das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Maßes, das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier oder mehrerer algebraischer Summen, sowie das Kürzen der Brüche und die Reduktion gewisser algebraischer Ausdrücke beruht. Je nach der Beschaffenheit der einzelnen Glieder des Polynoms kann die Faktorenzerlegung auf verschiedenen Wegen erreicht werden. Man kann daher verschiedene Fälle dieser Operation unterscheiden. Die wichtigsten sind die folgenden.

I. Fall. Sämtliche Glieder des Polynoms haben einen Faktor oder mehrere Faktoren gemein.

In diesem Falle scheidet man die Anzahl der gemeinschaftlichen Faktoren aus („sondert sie ab"), d. h. man setzt sie neben eine Klammer, in welche die Summe der nicht gemeinsamen Faktoren geschrieben wird. (Umkehrung der Multiplikation eines Polynoms mit einem Monom).

Beispiele:

1) $3ax - 4bx + 5cx - 9dx + 11ex - 13fx =$
$x(3a - 4b + 5c - 9d + 11e - 13f)$.

Erläuterung. Sämtliche Glieder des vorliegenden Polynoms haben den Faktor x gemein. Die in der Klammer stehenden Ausdrücke bilden die Summe der nichtgemeinschaftlichen Faktoren. Durch Multiplikation der in Parenthese stehenden Summe mit dem davor stehenden Faktor x erhält man das gegebene Polynom wieder.

2) $28abcx - 35cdgx + 56cmnx =$
$7cx(4ab - 5dg + 8mn)$.

3) $72abcxyz + 63defxyz - 99gxyz =$
$9xyz(8abc + 7def - 11g)$.

4) $18x^3y^5z^6 - 27x^6y^7z^{11} + 45x^5y^6z^{12} =$
$9x^3y^5z^6(2 - 3x^3y^2z^5 + 5x^2yz^6)$.

5) $(2x - 5y)(x - y) + (4x - 3y)(x - y) - (x - y)^2 -$
$(4x - 6y)(x - y) =$
$(x - y)[(2x - 5y) + (4x - 3y) - (x - y) - (4x - 6y)] =$
$(x - y)(2x - 5y + 4x - 3y - x + y - 4x + 6y) =$
$(x - y)(x - y) = (x - y)^2$.

Erläuterung. Die vier Glieder des gegebenen Polynoms haben den

Faktor $(x - y)$ gemein. Dieser muß mit der algebraischen Summe der nicht gemeinsamen Faktoren multipliciert werden, u. s. w.

6) $(3a + 4b)(a - b) + (6b + 5a)(a - b) - (a - b)^2 - (7a - 15b)(b - a) =$
$(a - b)(3a + 4b + 6b + 5a - a + b + 7a - 15b) =$
$(a - b)(14a - 4b).$

Erläuterung. Damit der Faktor $(b - a)$ des vierten Gliedes den Faktoren $(a - b)$ der drei ersten Glieder gleich werde, denke man so: $-(7a - 15b) . (b - a) = -(7a - 15b)(a - b) . - 1 = +(7a - 15b)(a - b)$. Der Kürze wegen können bei der Addition der nicht gemeinsamen Faktoren die die Aggregate umschließenden schwachen Klammern weggelassen und die Glieder sofort mit den entsprechenden Vorzeichen hingeschrieben werden.

II. Fall. Nur einzelne Glieder des Polynoms haben Faktoren gemein.

In diesem Falle trennt man ebenfalls die gemeinschaftlichen Faktoren heraus. Häufig erhält man dann ein neues Polynom, dessen Glieder gemeinschaftliche Faktoren haben, durch deren Heraussetzung die Verwandlung des gegebenen Polynoms in ein Produkt ermöglicht wird (wiederholtes Absondern).

Beispiele:

1) $3ac + 3ad - 5bc - 5bd =$
$3a(c + d) - 5b(c + d) =$
$(c + d)(3a - 5b).$

Erläuterung. Das erste und zweite Glied des gegebenen Polynoms besitzen den gemeinschaftlichen Faktor 3a, und dem dritten und vierten Gliede ist der Faktor 5b gemein. Setzt man diese gemeinschaftlichen Faktoren heraus, so erhält man $3a(c + d) - 5b(c + d)$ Die Glieder dieser Summe haben nun, wie ersichtlich, den Faktor $(c + d)$ gemein. Durch Heraussetzung desselben ergibt sich das Produkt $(c + d)(3a - 5b)$. Dem Gliede 5b hätte man auch das Vorzeichen + geben können, da $- 5bc - 5bd$ auch durch Multiplikation von 5b mit $(- c - d)$ entstanden sein könnte, allein dann wäre der Faktor $(- c - d)$ mit dem ersten Faktor $(c + d)$ in den Vorzeichen nicht übereinstimmend und ihm darum nicht gleich. — Um eine vorgenommene Zerfällung auf ihre Richtigkeit zu prüfen, multipliciert man die erhaltenen Faktoren mit einander. Sie ist richtig, falls die ursprüngliche Summe aus der Multiplikation resultiert.

2) $16c^2 - 36cd - 40cg - 28cf + 63df + 70fg =$
$4c(4c - 9d - 10g) - 7f(4c - 9d - 10g) =$
$(4c - 9d - 10g)(4c - 7f).$

3) $5ad + 15bd + 20cd + 7ae + 21be + 28ce =$
$5d(a + 3b + 4c) + 7e(a + 3b + 4c) =$
$(a + 3b + 4c)(5d + 7e).$

4) $3x^8 + 12x^5y^7 - 5x^3y^6 - 20y^{13} =$
$3x^5(x^3 + 4y^7) - 5y^6(x^3 + 4y^7) =$
$(x^3 + 4y^7)(3x^5 - 5y^6).$

5) $14a^3b^4c^4 + 15a^3b^3c^5 + 8ac^{10} - 20a^4bc^6 - 6b^2c^9 - 35a^6b^5 =$
$2c^4(7a^3b^4 + 4ac^6 - 3b^2c^5) - 5a^3b(7a^3b^4 + 4ac^6 - 3b^2c^5) =$
$(7a^3b^4 + 4ac^6 - 3b^2c^5)(2c^4 - 5a^3b).$

III. Fall. Die algebraische Summe besteht aus der Differenz zweier Quadrate.

Alsdann läßt sich dieselbe in das Produkt verwandeln, welches aus der Summe und Differenz der Basen jener Quadrate besteht.

Beispiele:

1) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$

2) $9a^2 - 16b^2 = (3a)^2 - (4b)^2 = (3a + 4b)(3a - 4b).$

3) $7m^2 - 63n^2 = 7(m^2 - 9n^2) = 7(m + 3n)(m - 3n).$

4) $25x^2y^2 - 36z^2t^2 = (5xy + 6zt)(5xy - 6zt).$

5) $4a^4b^6 - 9c^2d^4 = (2a^2b^3 + 3cd^2) \cdot (2a^2b^3 - 3cd^2).$

6) $(2x - 3y)^2 - 4y^2 = (2x - 3y)^2 - (2y)^2 =$
$(2x - 3y + 2y)(2x - 3y - 2y) =$
$(2x - y)(2x - 5y).$

Erläuterung. In diesem Beispiele ist die Basis des ersten Quadrats eine zusammengesetzte Zahl.

7) $64m^2 - (7m - 4n)^2 =$
$(8m)^2 - (7m - 4n)^2 =$
$(8m + 7m - 4n)(8m - 7m + 4n)$
$(15m - 4n)(m + 4n).$

Erläuterung. Die Summe der Basen beider Quadrate ist mit Anwendung von Klammern: $8m + (7m - 4n)$ und die Differenz derselben: $8m - (7m - 4n)$. Durch Auflösung der Klammern erhält man $(8m + 7m - 4n)$ und $(8m - 7m + 4n)$.

8) $25(4x + 5y)^2 - 16(3x - 7y)^2 =$
$[5(4x + 5y) + 4(3x - 7y)][5(4x + 5y) - 4(3x - 7y)] =$
$(32x - 3y)(8x + 53y).$

9) $a^{2m} - b^{2n} = (a^m)^2 - (b^n)^2 = (a^m + b^n)(a^m - b^n).$

10) $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) =$
$(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.

Zusatz. Dieses Beispiel zeigt, daß sich die Differenz gerader Potenzen als Differenz zweier Quadrate betrachten läßt. Auch läßt es erkennen, daß sich die Summe zweier gleicher gerader Potenzen ($a^2 + b^2$, $a^4 + b^4$) nicht in Faktoren zerlegen läßt (daß sie weder durch die Summe, noch Differenz der Basen ohne Rest teilbar ist, daß dagegen die Differenz zweier gleicher gerader Potenzen ($a^2 - b^2$, $a^4 - b^4$) zerlegbar ist (daß sie sowohl durch die Summe als Differenz der Basen ohne Rest teilbar ist).

11) $81m^4 - 16n^4 = (9m^2 + 4n^2)(3m + 2n)(3m - 2n)$.

12) $a^8 - b^8 = (a^4)^2 - (b^4)^2 = (a^4 + b^4)(a^4 - b^4) =$
$(a^4 + b^4)(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.

Erläuterung. Man vergleiche Lösung 10 und den Zusatz dazu.

13) $57^2 - 43^2 = (57 + 43)(57 - 43) = 100 \cdot 14 = 1400$.

IV. Fall. Die algebraische Summe ist entweder ein vollständiges Quadrat oder ein vollständiger Kubus eines Binoms oder Trinoms.

In diesem Falle ist: $a^2 \pm 2ab + b^2 = (\pm a \pm b)^2$, ferner: $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ und endlich: $-a^3 + 3a^2b \pm 3ab^2 + b^3 = (\pm a + b)^3$. Ein Trinom ist dann das Quadrat eines Binoms, wenn in demselben zwei Glieder vollständige Quadrate sind und ein Glied das doppelte Produkt der Basen dieser Quadrate bildet, und zwar das Quadrat der Summe oder Differenz der Grundzahlen, jenachdem jenes doppelte Produkt entweder das Vorzeichen + oder — hat u. s. w. Beispiele:

1) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$.

2) $64m^2 + 112mn + 49n^2 = (8m + 7n)^2$.

3) $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

4) $81a^4 - 198a^2b^2 + 121b^4 = (9a^2 - 11b^2)^2$.

5) $-x^2 - 2x - 1 = -(x^2 + 2x + 1) = -(x + 1)^2$.

6) $-64y^2 + 16y - 1 = -(64y^2 - 16y + 1) = -(8y - 1)^2$.

7) $m^2 + 2mn + n^2 - p^2 =$
$(m + n)^2 - p^2 =$
$(m + n + p)(m + n - p)$.

8) $m^2 - n^2 - 2np - p^2 =$
$m^2 - (n + p)^2 =$
$(m + n + p)(m - n - p)$.

9) $4n^2p^2 - (n^2 + p^2 - m^2)^2 =$
$(2np + n^2 + p^2 - m^2)(2np - n^2 - p^2 + m^2)$ . . III. Fall
$[(n + p)^2 - m^2][m^2 - (n - p)^2]$ . . . . IV. Fall.
$(n + p + m)(n + p - m)(m + n - p)(m - n + p)$ . . III. Fall.
10) $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = (a + b + c)^2$.
11) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$.
12) $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3 = (4x + 5y)^3$.

V. Fall. Die algebraische Summe ist entweder die Summe oder Differenz zweier gleichhoher ungerader Potenzen.

Hat eine algebraische Summe die Form $a^3 + b^3$, ist sie also die Summe zweier Kuben, so kann sie zerlegt werden in das Produkt aus der Summe der Grundzahlen dieser Kuben und einem Aggregat, das besteht aus dem Quadrate der ersten Grundzahl, minus dem Produkt aus den zwei Grundzahlen, plus dem Quadrate der zweiten Grundzahl. Es ist also: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Hat dagegen eine algebraische Summe die Form $a^3 - b^3$, besteht sie also aus der Differenz zweier Kuben, so kann sie zerlegt werden in ein Produkt aus der Differenz der Grundzahlen dieser Kuben und einem Aggregat aus dem Quadrate der ersten Grundzahl, plus dem Produkt der ersten und zweiten Grundzahl, plus dem Quadrate der zweiten Grundzahl. Es ist also: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Ähnliche Sätze lassen sich für die 5te, 7te u. s. w. Potenzen entwickeln. Beispiele:

1) $27x^3 + 64y^3 = (3x)^3 + (4y)^3 = (3x + 4y)(9x^2 - 12xy + 16y^2)$.
2) $64x^3 + 125y^3 = (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$.
3) $27a^3 - 8b^3 = (3a)^3 - (2b)^3 = (3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$.
4) $125m^3 - 216n^3 = (5m - 6n)(25m^2 + 30mn + 36n^2)$.
5) $x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$.
6) $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$.

Zusatz. Die vorstehenden Beispiele zeigen, daß die Summe zweier gleichhoher ungerader Potenzen durch die Summe, und die Differenz zweier gleichhoher ungerader Potenzen durch die Differenz der Basen ohne Rest teilbar ist. — Differenzen gleichhoher Potenzen mit dem Exponenten 4, 6 u. s. w. lassen sich auf verschiedene Weise zerlegen, wie folgende Beispiele zeigen:

7) $a^4 - b^4 = ?$

I. Lösung: $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$.

II. Lösung: $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) =$
$(a + b)(a^2(a - b) + b^2(a - b)) =$
$(a + b)(a^2 + b^2)(a - b).$

III. Lösung: $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) =$
$(a - b)(a^2(a + b) + b^2(a + b)) =$
$(a - b)(a^2 + b^2)(a + b).$

8) $a^6 - b^6 = ?$

I. Lösung: $a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2 =$
$(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)$ .... III. Fall.
$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .. V. Fall.

II. Lösung: $a^6 - b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$= (a + b)(a^3(a^2 - ab + b^2) - b^3(a^2 - ab + b^2))$
$= (a + b)(a^3 - b^3)(a^2 - ab + b^2)$
$= (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$

III. Lösung: $a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$= (a - b)(a^3(a^2 + ab + b^2) + b^3(a^2 + ab + b^2))$
$= (a - b)(a^3 + b^3)(a^2 + ab + b^2)$
$= (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$

IV. Lösung: $a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3$
$= (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
$= (a + b)(a - b)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2)$
$= (a + b)(a - b)((a^2 + b^2)^2 - a^2b^2)$
$= (a + b)(a - b)(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)$
$= (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2).$

9) $729 - x^6y^{12} = ?$

I. Lösung: $729 - x^6y^{12} = (3^3)^2 - (x^3y^6)^2$ ... III. Fall
$= (3^3 + x^3y^6)(3^3 - x^3y^6)$ ... III. Fall
$= (3 + xy^2)(9 - 3xy^2 + x^2y^4)(3 - xy^2)(9 + 3xy^2 + x^2y^4).$

II. Lösung: $729 - x^6y^{12} = (3^2)^3 - (x^2y^4)^3$ ... V. Fall
$= (3^2 - x^2y^4)(81 + 9x^2y^4 + x^4y^8)$ ... V. Fall
$= (3 + xy^2)(3 - xy^2)(81 + 18x^2y^4 + x^4y^8 - 9x^2y^4)$
$= (3 + xy^2)(3 - xy^2)((9 + x^2y^4)^2 - 9x^2y^4)$
$= (3 + xy^2)(3 - xy^2)(9 + x^2y^4 + 3xy^2)(9 + x^2y^4 - 3xy^2).$

III. Lösung: $729 - x^6y^{12} = 3^6 - (xy^2)^6$
$= (3 - xy^2)(3^5 + 3^4xy^2 + 3^3x^2y^4 + 3^2x^3y^6 + 3x^4y^8 + x^5y^{10})$...
Beispiel 8, Lösung III
$= (3 - xy^2)(3^3(3^2 + 3xy^2 + x^2y^4) + x^3y^6(3^2 + 3xy^2 + x^2y^4))$
$= (3 - xy^2)(3^3 + x^3y^6)(9 + 3xy^2 + x^2y^4)$
$= (3 - xy^2)(3 + xy^2)(9 - 3xy^2 + x^2y^4)(9 + 3xy^2 + x^2y^4).$

IV. Lösung: $729 - x^6y^{12} = 3^6 - (xy^2)^6$
$= (3 + xy^2)($u. s. w. Man vergl. das 8. Beispiel, II. Lösung.

VI. Fall. Die algebraische Summe ist ein Trinom von solcher Beschaffenheit, daß das erste Glied desselben das Quadrat irgend einer Größe ist, diese Größe auch im zweiten Gliede auftritt und das dritte Glied oder sein Koëfficient sich in zwei Faktoren zerlegen läßt, die zu einander addiert den Koëfficienten des zweiten Gliedes geben.

In diesem Falle erhält man, indem man das dritte Glied oder den Koëfficienten desselben in die Faktoren der angedeuteten Beschaffenheit zerlegt, aus dem Trinom ein Tetranom, auf das sich dann der Fall II anwenden läßt. Dabei stellt sich heraus, daß, wenn das dritte Glied des zerlegbaren Trinoms positiv ist, dasselbe oder sein Koëfficient in zwei positive oder negative Faktoren zerlegt werden muß, jenachdem das zweite Glied das Vorzeichen + oder — hat; ist dagegen das dritte Glied negativ, so muß dasselbe oder sein Koëfficient in zwei Faktoren von verschiedenem Vorzeichen zerlegt werden und zwar muß der größere das Vorzeichen + bekommen, wenn das zweite Glied des Trinoms positiv, dagegen das Vorzeichen —, wenn das zweite Glied negativ ist. Den Grund hievon wird man einsehen, wenn man bedenkt, daß:

$$(x + 4)(x + 3) = x^2 + 4x + 3x + 12 = x^2 + 7x + 12,$$
$$(x - 3)(x - 2) = x^2 - 3x - 2x + 6 = x^2 - 5x + 6,$$
$$(x + 5)(x - 3) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15,$$
$$(x - 5)(x + 3) = x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15,$$
$$(x + 5y)(x + 7y) = x^2 + 5xy + 7xy + 35y^2 = x^2 + 12xy + 35y^2,$$

oder allgemein:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab,$$
$$(x + ay)(x + by) = x^2 + axy + bxy + aby^2 = x^2 + (a + b)xy + aby^2$$

u. s. w. ist. Beispiele:

1) $x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5 + 6)x + 5 \cdot 6 = x^2 + 5x + 6x + 5 \cdot 6 = x(x + 5) + 6(x + 5) = (x + 5)(x + 6).$

2) $x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{1}{15} = x^2 + (\frac{1}{5} + \frac{1}{3})x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = x(x + \frac{1}{5}) + \frac{1}{3}(x + \frac{1}{5}) = (x + \frac{1}{5})(x + \frac{1}{3})$.

3) $a^2 - 20a + 99 = a^2 + (-11 - 9)a + (-11 \cdot -9) = a^2 - 11a - 9a - 11 \cdot -9 = a(a - 11) - 9(a - 11) = (a - 11)(a - 9)$.

4) $m^2 + 15m - 184 = m^2 + (23 - 8)m + 23 \cdot -8 = m^2 + 23m - 8m + 23 \cdot -8 = m(m + 23) - 8(m + 23) = (m + 23)(m - 8)$.

5) $x^2 - 19x - 120 = x^2 + (-24 + 5)x - 24 \cdot 5 = x^2 - 24x + 5x - 24 \cdot 5 = x(x - 24) + 5(x - 24) = (x - 24)(x + 5)$.

6) $a^2 + 21ab + 108b^2 = a^2 + (12 + 9)ab + 12 \cdot 9b^2 = (a + 12b)(a + 9b)$.

7) $x^2 - 19xy + 88y^2 = x^2 + (-11 - 8)xy - 11 \cdot -8 \cdot y^2 = (x - 11y)(x - 8y)$.

8) $m^2 - \frac{1}{24}mn - \frac{5}{12}n^2 = m^2 + (-\frac{2}{3} + \frac{5}{8})mn - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot n^2 = (m - \frac{2}{3}n)(m + \frac{5}{8}n)$.

VII. Fall. Die algebraische Summe ist ein Trinom von der Beschaffenheit des unter VI näher bezeichneten, nur mit dem Unterschiede, daß in allen 3 Gliedern Koëffizienten vorkommen.

In diesem Falle kann man die Faktoren des Trinoms auf verschiedene Weise erhalten.

1) Verfahren. Man sucht ein Glied des Trinoms so in eine Summe oder Differenz zu verwandeln, daß hiedurch eine gerade Anzahl von Gliedern entsteht und zugleich Fall II anwendbar ist. Beispiele:

1) $10g^2 + 23gh + 12h^2$
$= 10g^2 + 15gh + 8gh + 12h^2$
$= 5g(2g + 3h) + 4h(2g + 3h)$
$= (2g + 3h)(5g + 4h)$.

2) $6b^4 + 8b^2c - 8c^2$
$= 6b^4 + 12b^2c - 4b^2c - 8c^2$
$= 6b^2(b^2 + 2c) - 4c(b^2 + 2c)$
$= (b^2 + 2c)(6b^2 - 4c)$
$= (b^2 + 2c)(3b^2 - 2c)2$.

2) Verfahren. Man scheidet den Koëfficienten des ersten Gliedes aus, wodurch man in der Klammer ein Trinom von der unter VI bezeichneten Form erhält. Dieses wird dann in der unter VI angegebenen Weise behandelt. Die zuletzt bleibenden Brüche entfernt man durch Multiplikation mit den entsprechenden Faktoren des ausgeschiedenen Koëfficienten. Beispiele:

$$\begin{aligned}
1)\ & 10g^2 + 23gh + 12h^2 \\
&= 10(g^2 + \tfrac{23}{10}gh + \tfrac{12}{10}h^2) \\
&= 10[g^2 + (\tfrac{3}{2} + \tfrac{4}{5})gh + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot h^2] \\
&= 10[g^2 + \tfrac{3}{2}gh + \tfrac{4}{5}gh + \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot h^2] \\
&= 10[g(g + \tfrac{3}{2}h) + \tfrac{4}{5}h(g + \tfrac{3}{2}h)] \\
&= 10[(g + \tfrac{3}{2}h)(g + \tfrac{4}{5}h)] \\
&= 10 \cdot \left[\frac{2g + 3h}{2} \cdot \frac{5g + 4h}{5}\right] \\
&= \tfrac{10}{2 \cdot 5} \cdot [(2g + 3h) \cdot (5g + 4h)] \\
&\quad = (2g + 3h)(5g + 4h).
\end{aligned}$$

Zusatz. Dieses Beispiel wurde, um das Verfahren deutlich zu zeigen, möglichst ausführlich behandelt. Die nachfolgenden werden in der üblichen Kürze vorgeführt.

$$\begin{aligned}
2)\ & 15a^2 + 38ab + 24b^2 \\
&= 15(a^2 + \tfrac{38}{15}ab + \tfrac{24}{15}b^2) \\
&= 15[a^2 + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{6}{5})ab + \tfrac{4}{3} \cdot \tfrac{6}{5} \cdot b^2] \\
&= 15(a + \tfrac{4}{3}b)(a + \tfrac{6}{5}b) \\
&\quad = (3a + 4b)(5a + 6b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3)\ & 56x^2 - 9xy - 2y^2 \\
&= 56(x^2 - \tfrac{9}{56}xy - \tfrac{2}{56}y^2) \\
&= 56[x^2 + (-\tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{8})xy - \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot y^2] \\
&\quad = 56(x - \tfrac{2}{7}y)(x + \tfrac{1}{8}y) \\
&\quad\quad = (7x - 2y)(8x + y).
\end{aligned}$$

3) Verfahren. Um ein drittes Verfahren zu erhalten, überlege man zunächst, wie ein Trinom der angegebenen Art durch Multiplikation zweier Binome entsteht, nämlich: $(9a + 7b)(2a + 5b) = 18a^2 + 14ab + 45ab + 35b^2 = 18a^2 + 59ab + 35b^2$.

Bedenkt man, daß das erste Glied $18a^2$ dieses geordneten Polynoms durch Multiplikation des ersten Gliedes des einen Faktors mit dem ersten Gliede des andern Faktors entstand, das dritte Glied $35b^2$ das Produkt aus dem zweiten Gliede des einen Faktors

und dem zweiten Gliede des andern ist und das zweite Glied 59ab endlich gleich ist der algebraischen Summe folgender zwei Produkte:

1. Glied des 1. Faktors $\times$ 2. Glied des 2. Faktors,
2 „ „ 1. „ $\times$ 1. „ „ 2. „

so läßt sich hieraus folgendes Verfahren, Polynome in Faktoren zu zerlegen, ableiten:

Man zerlegt die beiden äußeren Glieder des gegebenen Polynoms in je 2 Faktoren, benennt 2 hievon äußere und die 2 anderen innere Faktoren, multipliciert diese gegenseitig miteinander und subtrahiert schließlich die Summe beider Produkte vom innern Gliede. Geht die Subtraktion auf, so ist die Zerlegung bewirkt und man setzt alsdann die Summe der beiden äußern Faktoren als den einen, die Summe der beiden innern Faktoren als den andern Faktor des zu suchenden Produkts. Ist dies nicht der Fall, so muß eine andere Zerfällung der beiden äußern Glieder vorgenommen werden.

Beispiele:

1) $18a^2 + 59ab + 35b^2 \cdot$
$2a \cdot 9a \qquad 7b \cdot 5b$
$\left.\begin{matrix}14ab\\45ab\end{matrix}\right\}$
0.

Also ist: $18a^2 + 59ab + 35b^2 = (2a + 5b)(9a + 7b)$.

2) $20a^2 + 56ab + 15b^2 \cdot$
$10a \cdot 2a \qquad 5b \cdot 3b$
$\left.\begin{matrix}50ab\\6ab\end{matrix}\right\}$
0.

Demnach ist: $20a^2 + 56ab + 15b^2 = (10a + 3b)(2a + 5b)$.

3) $20a^2 - 39ab + 18b^2 \cdot$
$4a \cdot 5a \qquad -6b \cdot -3b$
$\left.\begin{matrix}-24ab\\-15ab\end{matrix}\right\}$
0.

Also ist: $20a^2 - 39ab + 18b^2 = (4a - 3b)(5a - 6b)$.

4) $56x^2 \quad - 19xy - 132y^2$ ·

$7x \cdot 8x \qquad + 11y \cdot - 12y$

$$\left.\begin{array}{l} + 77xy \\ - 96xy \end{array}\right\}$$

0.

Also ist: $56x^2 - 19xy - 132y^2 = (7x - 12y)(8x + 11y)$.

VIII. Einige besondere Fälle.

Beispiele:

1) $x^4 + x^2y^2 + y^4$
$= (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2$
$= (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$
$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$.

2) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$= x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$
$= (x + y)(x^2 - xy + y^2) + 3xy(x + y)$
$= (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 3xy)$
$= (x + y)(x^2 + 2xy + y^2)$
$= (x + y)(x + y)^2$
$= (x + y)^3$.

3) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
$= 8x^3 - 27y^3 + (- 36x^2y + 54xy^2)$
$= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) - 18xy(2x - 3y)$
$= (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2 - 18xy)$
$= (2x - 3y)(4x^2 - 12xy + 9y^2)$
$= (2x - 3y)(2x - 3y)^2$
$= (2x - 3y)^3$.

B. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes.

Unter dem größten gemeinschaftlichen Maße oder Teiler (g. g. T.) zweier oder mehrerer algebraischer Summen versteht man jenen größten Faktor, welcher in den gegebenen Polynomen ohne Rest enthalten ist. Dieser g. g. T. läßt sich durch Zerlegung der gegebenen Polynome in ihre Faktoren und durch Division bestimmen.

I. Methode. Sind die gegebenen algebraischen Summen so beschaffen, daß sie sich auf leichte und sichere Weise in Faktoren (Primfaktoren) zerlegen lassen, so nehme man diese Zerlegung vor.

Alsdann ist das Produkt der gemeinschaftlichen Faktoren der g. g. T. Treten aber gewisse Größen öfter als Faktor auf und sind diese in Potenzform geschrieben, so ist das Produkt der niedrigsten Potenzen der gemeinsamen Faktoren der g. g. T. Beispiele:

1) Man bestimme den g. g. T. von $a^2 + 6a + 9$ und $a^2 + 7a + 12$!

Auflösung.

Es ist: $a^2 + 6a + 9 = (a + 3)(a + 3)$ . . IV. Fall.

Und: $a^2 + 7a + 12 = (a + 4)(a + 3)$ . . VI. Fall.

Folglich ist der g. g. T. der gegebenen Ausdrücke $(\mathbf{a} + \mathbf{3})$.

2) Ebenso von $23744a^2b^3(x + y)^2$ und $11968ab^2(x + y)$!

Auflösung. Da $23744a^2b^3(x + y)^2 = 2^6 \cdot 371 \cdot a^2b^3(x + y)^2$
Und: $11968ab^2(x + y) = 2^6 \cdot 187 \cdot ab^2(x + y)$ ist, so ist der zu suchende g. g. T.: $2^6 \cdot ab^2(x + y) = \mathbf{64ab^2(x + y)}$.

Nebenrechnungen:

$23744 = 2 \,.\, 11872$	$11968 = 2 \,.\, 5984$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 5936$	$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2992$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2968$	$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 1496$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 1484$	$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 748$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 742$	$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 374$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 371$	$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 187$
$= 2^6 \,.\, 371$	$= 2^6 \,.\, 187.$

3) Desgleichen von $64a^3b^2c^4(4a^2 - 9b^2)$ und $80a^4b^2c^3(2a + 3b)^2$ und $96a^2b^4c^3(2a - 3b)^2$.

Auflösung.

Es ist: $64a^3b^2c^4(4a^2 - 9b^2) = 2^6 \cdot a^3b^2c^4(2a + 3b)(2a - 3b)$

Und: $80a^4b^2c^3(2a + 3b)^2 = 2^4 \cdot 5 \cdot a^4b^2c^3(2a + 3b)^2$

„ $96a^2b^4c^3(2a - 3b)^2 = 2^5 \cdot 3 \cdot a^2b^4c^3(2a - 3b)^2$.

Folglich ist der g. g. T.: $2^4a^2b^2c^3 = \mathbf{16a^2b^2c^3}$.

4) Desgleichen von $720(x^2 - 4)$, $1080(x^2 + x - 6)$ und $2520(3xy + 4x - 6y - 8)$!

Auflösung.

Es ist: $720(x^2 - 4) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (x + 2)(x - 2)$,

Und: $1080(x^2 + x - 6) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot (x + 3)(x - 2)$,

„ $2520(3xy + 4x - 6y - 8) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (3y + 4)(x - 2)$.

Der g. g. T. ist demnach: $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot (x - 2) = \mathbf{360(x - 2)}$.

II. Methode. Lassen sich die gegebenen algebraischen Summen nicht auf leichte und sichere Weise in Faktoren zerlegen, so verfährt man gerade so, wie beim Aufsuchen des g. g. T. für bestimmte Zahlen, d. h. man wendet die sogenannte Kettendivision an. Zu dem Zwecke ordnet man zunächst die Glieder beider Polynome übereinstimmend, läßt alsdann den etwa in allen Gliedern vorhandenen Faktor weg und dividiert hierauf mit dem kleineren Aggregat in das größere. Sollte hiebei die Division der ersten Posten nicht aufgehen, so multipliciert man den Dividenden mit einer solchen Zahl, daß dies der Fall ist (das g. g. Maß wird hiedurch nicht geändert). Wenn die Division beider Polynome durcheinander aufgeht, so ist der Divisor selbst der g. g. T., wenn nicht, so dividiert man mit dem Reste in den vorhergehenden Divisor, wobei auch das über das Aufgehen der Division der ersten Glieder oben Gesagte zu berücksichtigen ist. Dies Verfahren setzt man so lange fort, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor ist alsdann der g. g. T. der beiden Polynome. Beispiele:

1) Es soll der g. g. T. der zwei Aggregate $3a^3 + 5a^2 - 9a + 9$ und $a^2 + 5a + 6$ bestimmt werden!

Auflösung. Beide Polynome sind schon geordnet und das erste Glied des größeren Polynoms ist durch das erste Glied des kleineren ohne Rest teilbar. Daher ist:

$$
\begin{array}{l}
(3a^3 + 5a^2 - 9a + 9) : (a^2 + 5a + 6) = 3a - 10 \\
\underline{\;\;3a^3 + 15a^2 + 18a\;\;} \\
\quad - 10a^2 - 27a + 9 \\
\quad \underline{- 10a^2 - 50a - 60} \\
\qquad\qquad 23a + 69.
\end{array}
$$

Nun muß man den vorhergehenden Divisor $(a^2 + 5a + 6)$ durch den Rest $23a + 69$ dividieren. Da aber a^2 durch $23a$ nicht ohne Rest teilbar ist, so muß man vor der Division den Dividenden mit 23 multiplicieren, oder was im vorliegenden Falle einfacher ist, den Divisor durch 23 dividieren. Man erhält alsdann:

$$
\begin{array}{l}
(a^2 + 5a + 6) : (a + 3) = a + 2 \\
\underline{\;a^2 + 3a\;\;} \\
\quad 2a + 6 \\
\quad 2a + 6
\end{array}
$$

Da die Division aufgeht, so ist der letzte Divisor $(a + 3)$ der zu suchende g. g. T. und es ist: $(3a^3 + 5a^2 - 9a + 9) : (a + 3) =$

$3a^2 - 4a + 3$ und $(a^2 + 5a + 6) : (a + 3) = a + 2$. Für das schnelle Rechnen eignen sich die folgenden Formen:

$$\begin{array}{r|l|l}
a^2 + 5a + 6 & 3a^3 + 5a^2 - 9a + 9 & 3a - 10. \\
 & 3a^3 + 15a^2 + 18a & \\
\hline
 & -10a^2 - 27a + 9 & \\
 & -10a^2 - 50a - 60 & \\
\hline
 & :23 \quad 23a + 69 & \\
 & a + 3 & a^2 + 5a + 6 \mid a + 2. \\
 & & a^2 + 3a \\
\hline
 & & 2a + 6 \\
 & & 2a + 6 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

oder:

$$\begin{array}{l|l|l}
3a^3 + 5a^2 - 9a + 9 & a^2 + 5a + 6 & 3a - 10 \\
3a^3 + 15a^2 + 18a & a^2 + 3a & a + 2 \\
\hline
-10a^2 - 27a + 9 & 2a + 6 & \\
-10a^2 - 50a - 60 & 2a + 6 & \\
\hline
:23 \quad 23a + 69 & 0 & \\
a + 3. & &
\end{array}$$

2) Man soll den g. g. T. der zwei Aggregate $3x^4 - 13x^3 - 7x^2 - 7x - 6$ und $6x^3 + x^2 + 7x + 6$ suchen!

Auflösung.

$3x^4 - 13x^3 - 7x^2 - 7x - 6$	$6x^3 + x^2 + 7x + 6$	$x - 9$
$\cdot 2$	$\cdot 11$	
$6x^4 - 26x^3 - 14x^2 - 14x - 12$	$66x^3 + 11x^2 + 77x + 66$	$-2x - 19$
$6x^4 + x^3 + 7x^2 + 6x$	$+66x^3 - 46x^2 - 60x$	
$-27x^3 - 21x^2 - 20x - 12$	$57x^2 + 137x + 66$	
$\cdot 2$	$\cdot 11$	
$-54x^3 - 42x^2 - 40x - 24$	$627x^2 + 1507x + 726$	
$-54x^3 - 9x^2 - 63x - 54$	$627x^2 - 437x - 570$	
$-33x^2 + 23x + 30$	$1944x + 1296$	
$-33x^2 - 22x$	$: 648$	
$45x + 30$	$3x + 2$	$-11x + 15$
$45x + 30$		
0		

Also ist das zu suchende größte gemeinschaftliche Maß $3x + 2$ und es ist:

$(3x^4 - 13x^3 - 7x^2 - 7x - 6) : (3x + 2) = (x^3 - 5x^2 + x - 3)$ und $(6x^3 + x^2 + 7x + 6) : (3x + 2) = (2x^2 - x + 3)$.

3) Ebenso von $3a^5 - a^4 - 3a + 1$ und $3a^4 + a^3 + a^2 + a - 2$!

Auflösung.

$3a^5 - a^4 - 3a + 1$	$3a^4 + a^3 + a^2 + a - 2$	$a - 2$
$3a^5 + a^4 + a^3 + a^2 - 2a$	$3a^4 + 3a^3 + 3a^2 + 3a$	$3a - 2$
$-2a^4 - a^3 - a^2 - a + 1$	$-2a^3 - 2a^2 - 2a - 2$	
$\cdot\ 3$	$-2a^3 - 2a^2 - 2a - 2$	
$-6a^4 - 3a^3 - 3a^2 - 3a + 3$	0	
$-6a^4 - 2a^3 - 2a^2 - 2a + 4$		
$-a^3 - a^2 - a - 1$		
$\cdot\ -1$		
$\mathbf{a^3 + a^2 + a + 1}$		

Also ist der zu suchende g. g. T. $\mathbf{a^3 + a^2 + a + 1}$.

4) Desgleichen von $5x^3 + 9x^2y + 3xy^2 - y^3$ und $30x^2 - xy - y^2$!

Auflösung.

$5x^3 + 9x^2y + 3xy^2 - y^3$	$30x^2 - xy - y^2$	$x + 11$
$\cdot\ 6$	$30x^2 - 6xy$	$6x + y$
$30x^3 + 54x^2y + 18xy^2 - 6y^3$	$5xy - y^2$	
$30x^3 - x^2y - xy^2$	$5xy - y^2$	
$55x^2y + 19xy^2 - 6y^3$	0	
$: y$		
$55x^2 + 19xy - 6y^2$		
$\cdot\ 6$		
$330x^2 + 114xy - 36y^2$		
$330x^2 - 11xy - 11y^2$		
$125xy - 25y^2$		
$: 25y$		
$\mathbf{5x - y}$		

Der zu suchende g. g. T. ist also: $\mathbf{5x - y}$.

C. Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (des kl. gem. Dividuus).

Unter dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen (k. g. V.) zweier oder mehrerer algebraischer Summen versteht man den kleinsten Ausdruck, in welchem alle gegebenen Summen als Faktoren ohne Rest enthalten sind. Dasselbe kann durch Zerlegung der gegebenen Polynome in ihre einfachen Faktoren (Primfaktoren) und mit Hilfe des g. g. T. bestimmt werden.

I. Methode. Lassen sich die gegebenen Aggregate leicht und sicher in Faktoren zerlegen, so nehme man diese Zerlegung vor. Alsdann erhält man das k. g. V., indem man die höchsten

Potenzen der in den gegebenen Aggregaten vorkommenden Primfaktoren miteinander multipliciert. Beispiele:

1) Man bestimme das k. g. V. von $x^2 - y^2$ und $x^2 - 2xy + y^2$!

Auflösung. Es ist: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

Und: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$.

Folglich ist das k. g. V. beider Summen: $(x - y)^2(x + y)$.

2) Desgleichen von $32a^3b^6c^5$, $48a^5b^7c^6$ und $64a^7b^5c^{11}$!

Auflösung. $32a^3b^6c^5 = 2^5 \cdot a^3b^6c^5$,

$48a^5b^7c^6 = 2^4 \cdot 3 \cdot a^5b^7c^6$,

$64a^7b^5c^{11} = 2^6 \cdot a^7b^5c^{11}$.

Folglich ist das k. g. V. $2^6 \cdot 3 \cdot a^7b^7c^{11} = \mathbf{192a^7b^7c^{11}}$.

3) Ebenso von $72(x^3 - x^2 - x + 1)$, $288(x^3 - x^2 + x - 1)$ und $648(x - 1)$!

Auflösung. Da $72(x^3 - x^2 - x + 1) = 2^3 \cdot 3^2(x - 1)^2(x + 1)$, $288(x^3 - x^2 + x - 1) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot (x - 1)(x^2 + 1)$ und $648(x - 1) = 2^3 \cdot 3^4(x - 1)$ ist, so erhält man als k. g. V. $2^5 \cdot 3^4 \cdot (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1) = \mathbf{2592(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1)}$.

II. Methode. Sind die Aggregate so beschaffen, daß sie sich nicht leicht und sicher in Faktoren zerlegen lassen, dann bestimme man den g. g. T. derselben. Das k. g. V. erhält man alsdann, indem man eines der beiden Aggregate durch den g. g. T. dividiert und den erhaltenen Quotienten mit dem anderen Aggregate multipliciert. Beispiele:

1) Man suche das k. g. V. der Aggregate $7a^3 - 6a^2 - 6a + 5$ und $7a^3 + 15a^2 - 3a - 10$!

Auflösung.

$7a^3 - 6a^2 - 6a + 5$	$7a^3 + 15a^2 - 3a - 10$	1
$7a^3 + 15a^2 - 3a - 10$	$7a^3 + a^2 - 5a$	$a + 2$
$- 21a^2 - 3a + 15$	$14a^2 + 2a - 10$	
$: - 3$	$14a^2 + 2a - 10$	
$\mathbf{7a^2 + a - 5}$	0	

Der g. g. Teiler beider Aggregate ist also: $7a^2 + a - 5$. Demnach ist das k. g. V. derselben: $\mathbf{(7a^3 - 6a^2 - 6a + 5)(a + 2)}$; denn der Quotient aus dem zweiten Aggregate und dem g. g. Teiler ist $a + 2$; oder, da der g. g. T. im ersten Polynome $(a - 1)$ mal enthalten, und das zweite Polynom $(7a^2 + a - 5)(a + 2)$ ist: $\mathbf{(a - 1)(7a^2 + a - 5)(a + 2)}$.

II. Gebrochene Zahlen.

§. 15. Die Brüche im allgemeinen.

1) Wie die Subtraktion, so führt auch die Division zu einer Erweiterung der natürlichen Zahlenreihe. Um nämlich in jedem Falle das Resultat einer Division für jeden beliebigen Dividendus und Divisor angeben zu können, muß man zwischen je zwei benachbarte Zahlen der natürlichen Zahlenreihe neue Zahlen einschieben (interpolieren). Diese neuen Zahlen heißen *Brüche*; im Gegensatze zu ihnen nennt man die ursprünglichen Zahlen *ganze Zahlen*.

2) Ein Bruch entsteht, wenn man die Einheit in eine gewisse Anzahl gleicher Teile teilt und einen oder mehrere solcher Teile zusammen nimmt. Die Zahl eines Bruches, welche angibt, in wieviel Teile die Einheit geteilt ist, heißt der *Nenner*, und diejenige, welche angibt, wieviel solcher Teile vorhanden sind, der *Zähler* des Bruches. Hiernach drückt z. B. der Bruch $m : n$ aus, daß man die Einheit in n gleiche Teile geteilt und m solcher Teile genommen hat (*echte* und *unechte* Brüche, *eigentliche* und *uneigentliche* Brüche, der *reciproke* Wert eines Bruches, *gemischte* Zahlen, *Doppelbrüche*, *gemeine* Brüche und *Dezimalbrüche*).

3) Jeder Quotient ist gleich einem Bruche, dessen Zähler der Dividend und dessen Nenner der Divisor ist; es sind also $a : b$ und $\frac{a}{b}$ identische Ausdrücke.

§. 16. Das Erweitern und Kürzen der Brüche.

1) *Der Wert eines Bruches bleibt unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert.*

Behauptung 1) $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$; *Behauptung* 2) $\frac{m}{n} = \frac{m : p}{n : p}$.

Beweis zu 1). Beweisen wir die Richtigkeit dieser Behauptung zunächst an einem bestimmten Beispiele. Multipliciert man den Zähler 5 des Bruches $\frac{5}{9}$ mit 4, so entsteht der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$. Da $\frac{5 \cdot 4}{9}$ 4 mal soviel 9tel sind als 5 neuntel, so ist der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$ vier mal so groß als der Bruch $\frac{5}{9}$. Multipliciert man nun den Nenner 9 des Bruches $\frac{5 \cdot 4}{9}$ mit 4, so entsteht der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$. Dieser Bruch ist, da jetzt die

Einheit in 4 mal soviel gleiche Teile geteilt werden soll, 4 mal so klein als der Bruch $\frac{5 \cdot 4}{9}$. Da nun $\frac{5 \cdot 4}{9}$ 4 mal so groß als $\frac{5}{9}$ und $\frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$ wieder 4 mal so klein als $\frac{5 \cdot 4}{9}$ ist, so ist $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4}$. Da das Nämliche für jedes andere Beispiel erwiesen werden kann, so kann man ganz allgemein setzen $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$. — Allgemein geführt, heißt der Beweis: Multipliciert man den Zähler m des Bruches $\frac{m}{n}$ mit p, so entsteht der Bruch $\frac{m \cdot p}{n}$. Da mp ntel p mal soviel ntel sind, als m ntel, so ist der Bruch $\frac{mp}{n}$ p mal so groß als der Bruch $\frac{m}{n}$. Multipliciert man nun den Nenner n des Bruches $\frac{mp}{n}$ auch mit p, so wird dieser Bruch, da jetzt die Einheit in p mal soviel gleiche Teile geteilt werden soll, wieder p mal so klein. Es ist also $\frac{m}{n} = \frac{m \cdot p}{n \cdot p}$, w. z. b. w. — Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich auch die Richtigkeit der 2. Behauptung.

Der vorstehende Satz gibt uns einerseits das Mittel an die Hand, einen Bruch in einen andern von gegebenem Nenner zu verwandeln, andererseits dient er auch dazu, einen Bruch in kleineren Zahlen auszudrücken, denselben zu *heben* oder zu *kürzen*. Das Letztere geschieht, indem man Zähler und Nenner durch die gemeinsamen Faktoren derselben dividiert. Es müssen diese also zunächst in ihre Faktoren zerlegt werden.

Beispiele:

1) $$\frac{5x}{3y} + \frac{6y}{5z} + \frac{2z}{x} = \frac{25xxz}{15xyz} + \frac{18xyy}{15xyz} + \frac{30yzz}{15xyz}.$$

Erläuterung. In dieser Aufgabe sollen die drei ungleichnamigen Brüche gleichnamig gemacht werden. Es ist dies mit Hilfe des Satzes 1) möglich. Zunächst sucht man für die drei Brüche den *Haupt-* oder *Generalnenner*. Derselbe ist hier 15xyz. Nun bringt man die einzelnen Nenner auf diesen Hauptnenner. Gibt man dem ersten Bruch den Nenner 15xyz, so hat man damit seinen Nenner, der ursprünglich 3y ist, mit 5xz multipliciert. Damit nun der Wert dieses Bruches nicht verändert wird, muß man auch den Zähler desselben mit 5xz multiplicieren u. s. w.

2) $$\frac{36(x - y)(z - t)}{48(z + t)(x - y)} = \frac{3(z - t)}{4(z + t)}.$$

Erläuterung. Zähler und Nenner enthalten den gemeinschaftlichen Faktor 12 (x—y). Dividiert man beide durch diese Zahl, so erscheint der obige gekürzte Bruch, der denselben Wert hat, wie der gegebene.

3) $\frac{3ax - 4bx + 5cx}{2fx + 8gx - 9hx} = \frac{x(3a - 4b + 5c)}{x(2f + 8g - 9h)} = \frac{3a - 4b + 5c}{2f + 8g - 9h}.$

4) $$\frac{3a^2x + 6ax^2 + 3x^3 - 2a^2y - 4axy - 2x^2y + a^2m + 2amx + mx^2}{3a^2x - 2a^2y + a^2m - 3x^3 + 2x^2y - mx^2} =$$

$$\frac{3x(a^2 + 2ax + x^2) - 2y(a^2 + 2ax + x^2) + m(a^2 + 2ax + x^2)}{a^2(3x - 2y + m) - x^2(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{(a^2 + 2ax + x^2)(3x - 2y + m)}{(a^2 - x^2)(3x - 2y + m)} =$$

$$\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 - x^2} =$$

$$\frac{(a + x)(a + x)}{(a + x)(a - x)} =$$

$$\frac{a + x}{a - x}.$$

5) $$\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 4n + 4} =$$

$$\frac{n^2(n - 2)}{(n - 2)(n - 2)} =$$

$$\frac{n^2}{n - 2}.$$

6) $$\frac{a^2x - ax^2}{x^2 - a^2} =$$

$$\frac{ax \cdot (a - x)}{(x + a) \cdot (x - a)} =$$

$$\frac{- ax \cdot (x - a)}{(x + a) \cdot (x - a)} =$$

$$\frac{- ax}{x + a} =$$

$$\frac{- ax}{a + x}.$$

7) $$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}{a^2 - b^2 - c^2 - 2bc} =$$

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)} =$$

$$\frac{(a + b + c) \cdot (a + b + c)}{a^2 - (b + c)^2} =$$

$$\frac{(a + b + c) \cdot (a + b + c)}{(a + b + c) \cdot (a - b - c)} =$$

$$\frac{a + b + c}{a - b - c}.$$

8) $\dfrac{27a^3b - 64b^4}{27a^2c^2 + 36abc^2 + 48b^2c^2} =$

$\dfrac{b(27a^3 - 64b^3)}{3c^2(9a^2 + 12ab + 16b^2)} =$

$\dfrac{b(3a - 4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)}{3c^2(9a^2 + 12ab + 16b^2)} =$

$\dfrac{b(3a - 4b)}{3c^2}.$

9) $\dfrac{5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 2}{x^5 + x^3 + x^2 + 1} =$

$\dfrac{(x^3 + x^2 + x + 1)(5x - 2)}{(x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} =$

$\dfrac{5x - 2}{x^2 - x + 1}.$

Nebenrechnung.

$$\begin{array}{r}
x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\
\cdot\ 5 \\
\hline
5x^5 + 5x^3 + 5x^2 + 5 \\
5x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2x \\
\hline
- 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 5 \\
\cdot\ 5 \\
\hline
- 15x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 10x + 25 \\
- 15x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 9x + 6 \\
\hline
19x^3 + 19x^2 + 19x + 19 \\
:\ 19 \\
\hline
x^3 + x^2 + x + 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x - 2 & x - 3 \\
5x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x & 5x - 2 \\
\hline
- 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 & \\
- 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2 & \\
\hline
0. &
\end{array}$$

§. 17. Addition und Subtraktion von Brüchen.

1) Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert, bezw. subtrahiert und der erhaltenen Summe den gemeinschaftlichen Nenner als Nenner gibt.

Behauptung. $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n} = \dfrac{a + b + c}{n}.$

Beweis. Der erste Bruch drückt aus, daß man die Einheit in n gleiche Teile geteilt und a solcher Teile genommen hat; der zweite Bruch, daß man b solcher gleiche Teile und der dritte, daß man c derselben genommen hat. Im ganzen sind also a + b + c gleiche Teile vorhanden; jeder ist ein ntel, folglich sind es zusammen (a + b + c) ntel.

Beispiele:

$$1)\ \frac{7x-9y}{3x+2y}-\frac{5x-7y}{3x+2y}+\frac{x}{3x+2y}=\frac{7x-9y-5x+7y+x}{3x+2y}=\frac{3x-2y}{3x-2y}.$$

Erläuterung. In dieser Aufgabe sollen gleichnamige Brüche addiert, bezw. subtrahiert werden. Dies geschieht, indem man die Zähler addiert, bezw. subtrahiert und den Nenner unter die erhaltene Summe setzt. Statt den Zähler $5x-7y$ zu subtrahieren, kann man ihn mit entgegengesetzten Vorzeichen addieren.

$$2)\ \frac{13a+4b}{7x-5y}-\frac{3a-5b}{7x-5y}-\frac{2a+3b}{7x-5y}+\frac{5a+2b}{7x-5y}=\frac{13a+8b}{7x-5y}.$$

2) Sind ungleichnamige Brüche zu addieren, so macht man sie zunächst gleichnamig, was nach Satz 1) des vorigen §. geschieht, und verfährt dann wie bei gleichnamigen Brüchen. Für zusammengesetzte derartige Aufgaben läßt sich im allgemeinen folgendes Verfahren angeben: Man zerlegt die Nenner der Brüche in ihre Primfaktoren und bestimmt das k. g. V. aller Nenner, den sogenannten Generalnenner; sodann macht man die Brüche gleichnamig, löst die im Zähler etwa vorhandenen Klammern auf und faßt die Glieder des Zählers zusammen; hierauf zerlegt man den Zähler, wenn möglich, in Faktoren und kürzt den Bruch durch die gemeinsamen; schließlich kann man das Produkt des Zählers und Nenners in ein Aggregat verwandeln.

Beispiele: Die hieher gehörigen Aufgaben lassen sich nach Graden der Leichtigkeit also ordnen:

a) Zähler und Nenner der zu addierenden Brüche sind Monome.

$$1)\ \frac{5}{3a}-\frac{7c}{5ab}+8b=\frac{25b-21c+120ab^2}{15ab}.$$

Denk- und Sprechweise: Der Generalnenner (das kleinste gemeinschaftliche Vielfache) ist 15ab. Jedes dieser drei Glieder erhält nun den Nenner 15ab. Gibt man dem ersten Ausdrucke, der den Nenner 3a hat, den Nenner 15ab, so multipliciert man damit den Nenner desselben mit 5b; deshalb muß auch der Zähler dieses Bruches, damit sein Wert unverändert bleibt, mit 5b multipliciert werden. Der erste Bruch heißt also jetzt 25b : 15ab. In ähnlicher Weise ist beim zweiten und dritten Ausdrucke zu denken und zu

sprechen. Dem dritten Ausdrucke gibt man den Nenner 1. Die 3 erweiterten Ausdrücke heißen also 25b : 15ab, — 21c : 15ab und $120ab^2$: 15ab. Da gleichnamige Brüche addiert werden, indem man ihre Zähler addiert, so kann man der Kürze wegen sofort die Summe der Zähler bilden und ihr den gemeinschaftlichen Nenner geben.

$$2)\ \frac{3ab}{cd} + \frac{4ac}{3bd} - \frac{5ad}{2bc} + \frac{6bc}{5ad} - \frac{3bd}{2ac} - \frac{4cd}{ab} = \frac{90a^2b^2 + 40a^2c^2 - 75a^2d^2 + 36b^2c^2 - 45b^2d^2 - 120c^2d^2}{30abcd.}.$$

b) Die Zähler der zu addierenden Brüche sind algebraische Summen, die Nenner Monome.

$$1)\ \frac{2a + 3b}{5} - \frac{4a - 7b}{3} + \frac{6a + 3b}{4} - \frac{7a + 9b}{6} = ?$$

Sämtliche Ausdrücke gleichnamig gemacht, erhält man:

$$\frac{24a + 36b - 80a + 140b + 90a + 45b - 70a - 90b}{60}.$$

Die gleichn. Gl. addiert: $\frac{-36a + 131b}{60}$ oder $\frac{131b - 36a}{60}$.

Denk- und Sprechweise: Der Generalnenner ist 60. Gibt man dem ersten Bruche den Nenner 60, so multipliciert man damit den Nenner desselben mit 12; mithin muß auch der Zähler (2a + 3b) dieses Bruches, damit sein Wert nicht verändert wird, mit 12 multipliciert werden; das 12fache von 2a + 3b ist 24a + 36b. Erhält der zweite Ausdruck den Nenner 60, so wird sein Nenner 3 auf diese Weise mit 20 multipliciert. Deshalb muß man auch seinen Zähler mit 20 multiplicieren. Das 20fache von 4a — 7b ist 80a — 140b. Dieser Ausdruck soll aber subtrahiert werden. Statt (80a — 140b) zu subtrahieren, kann man das Entgegengesetzte davon, nämlich — 80a + 140b addieren u. s. w. — Man lasse nie außer acht, daß der Divisionsstrich den Dividendus als einen unzertrennlichen, zusammengehörigen Zahlenausdruck bezeichnet und daß daher beim Wegfallen desselben, falls vor ihm ein — steht, entweder eine Klammer gesetzt werden muß, oder die Vorzeichen sämtlicher Glieder des Dividendus in die entgegengesetzten zu verwandeln sind.

$$2)\ \frac{f + g}{3h} - \frac{f - g}{4h} + \frac{g + 2f}{2h} - \frac{2g - f}{3h} = \frac{4f + 4g - 3f + 3g + 6g + 12f - 8g + 4f}{12h} = \frac{17f + 5g}{12h}.$$

c) Unter den Nennern der zu addierenden Brüche kommen algebraische Summen vor.

1) $\frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{5a + 7b}{3a + 2b} = ?$

Die Brüche gleichnamig gemacht, erhält man:

$$\frac{(4a - 3b)(3a + 2b) - (5a + 7b)(2a - b)}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

Die Kl. aufgelöst, resultiert:

$$\frac{12a^2 + 8ab - 9ab - 6b^2 - 10a^2 + 5ab - 14ab + 7b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

Die gleichnamigen Glieder vereinigt, ergibt sich:

$$\frac{2a^2 - 10ab + b^2}{(2a - b)(3a + 2b)}.$$

2) $\frac{4a - 3b}{2a - b} - \frac{2a + b}{3a - 2b} - \frac{5a}{3b} = ?$

Bringt man sämtliche Brüche auf den Generalnenner, so ergibt sich:

$$\frac{3b \cdot (4a - 3b)(3a - 2b) - 3b(2a + b)(2a - b) - 5a \cdot (2a - b)(3a - 2b)}{3b \cdot (2a - b) \cdot (3a - 2b)}.$$

Werden nun die Klammern gelöst und die gleichnamigen Glieder zusammengefaßt, so folgt:

$$\frac{59a^2b - 61ab^2 + 21b^3 - 30a^3}{3b \cdot (2a - b) \cdot (3a - 2b)}.$$

Geordnet erhält man: $\frac{-30a^3 + 59a^2b - 61ab^2 + 21b^3}{3b \cdot (2a - b)(3a - 2b)}.$

3) $\frac{a + 2}{2a - 4} - \frac{4}{a^2 - 2a} - \frac{2a}{a^2 - 4} + \frac{4a}{4a - a^3} =$

$$\frac{a + 2}{2(a - 2)} - \frac{4}{a(a - 2)} - \frac{2a}{(a + 2)(a - 2)} + \frac{4a}{a(2 + a)(2 - a)} =$$

$$\frac{a(a + 2)^2 - 8(a + 2) - 4a^2 - 8a}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^3 + 4a^2 + 4a - 8a - 16 - 4a^2 - 8a}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^3 - 12a - 16}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^3 - 4a - 8a - 16}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a(a + 2)(a - 2) - 8(a + 2)}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{(a + 2)(a^2 - 2a - 8)}{2a(a + 2)(a - 2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a - 8}{2a(a - 2)} =$$

$$\frac{a^2 - 2a - 8}{2a^2 - 4a}.$$

Zusatz. Statt $+ \frac{4a}{a(2 + a)(2 - a)}$ denke man sich:

$$+ \frac{4a}{a(a + 2)(a - 2)\,.\,-1} = - \frac{4a}{a(a + 2)(a - 2)},$$ oder kürzer:

$$\frac{4a}{4a - a^3} = \frac{-4a}{a^3 - 4a} = \frac{-4a}{a(a + 2)(a - 2)}.$$

4) $$\frac{10a + 25b}{25a^2 - 4b^2} - \frac{342ab - b^2}{50a^3 - 8ab^2 - 125a^2b + 20b^3} + \frac{a + 64b}{10a^2 - 29ab + 10b^2}$$

$(5a + 2b)(5a - 2b)$ $\quad 2a(25a^2 - 4b^2) - 5b(25a^2 - 4b^2)$ $\quad 5a\,.\,2a \quad -5b\,.\,-2b$, $\left.\begin{matrix}-25ab\\-4ab\end{matrix}\right\}$

$(2a - 5b)(5a + 2b)(5a - 2b)$ $\quad (5a - 2b)(2a - 5b)$

$$\frac{(10a + 25b)(2a - 5b) - 342ab + b^2 + (a + 64b)(5a + 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}$$

$$= \frac{20a^2 - 125b^2 - 342ab + b^2 + 5a^2 + 322ab + 128b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)}.$$

$$\frac{25a^2 - 20ab + 4b^2}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} =$$

$$\frac{(5a - 2b)(5a - 2b)}{(5a + 2b)(5a - 2b)(2a - 5b)} =$$

$$\frac{5a - 2b}{(5a + 2b)(2a - 5b)}.$$

5) $\frac{21a - 2a}{24a^3 - 864a + 36a^2 - 1296} - \frac{2a - 12}{6a^2 + 45a + 54} - \frac{6a - 45}{8a^2 - 36a - 72} + \frac{10a - 15}{6a^2 - 216}$

$12(2a^3 - 72a + 3a^2 - 108)$	$3(2a^2 + 15a + 18)$	$4(2a^2 - 9a - 18)$	$6(a^2 - 36)$
$= 12(2a(a^2 - 36) + 3(a^2 - 36))$	$2a \, . \, a \quad 6 \, . \, 3$	$2a \, . \, a \quad -6 \, . \, 3$	$\mathbf{6(a + 6)(a - 6)}$
	$\left.\begin{matrix} 12a \\ 3a \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} -12a \\ +3a \end{matrix}\right\}$	
$= \mathbf{12(2a + 3)(a + 6)(a - 6)}$	$\mathbf{3(2a + 3)(a + 6)}$	$\mathbf{4(2a + 3)(a - 6)}$.	

$$\frac{21a - 2a^2 - 8(a - 6)(a - 6) - 9(2a - 15)(a + 6) + 10(2a - 3)(2a + 3)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{21a - 2a^2 - 8a^2 + 96a - 288 - 18a^2 + 27a + 810 + 40a^2 - 90}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12a^2 + 144a + 432}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{12(a^2 + 12a + 36)}{12(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a^2 + 12a + 36}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{(a + 6)(a + 6)}{(a + 6)(a - 6)(2a + 3)} =$$

$$\frac{a + 6}{(a - 6)(2a + 3)}.$$

§. 18. Multiplikation von Brüchen.

1) Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man entweder den Zähler mit dieser Zahl multipliciert und den Nenner unverändert läßt, oder den Nenner durch diese Zahl dividiert, bei unverändertem Zähler.

Behauptung 1) $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{a \cdot m}{n}$; Behauptung 2) $\frac{a}{n} \cdot m = \frac{a}{a:m}$.

Beweis. Der Zähler eines Bruches bezeichnet die Anzahl der vorhandenen gleichen Teile; multipliciert man nun denselben mit der ganzen Zahl m, so erhält der Bruch m mal soviele Teile, also auch den m fachen Wert, z. B. $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$. — Der Nenner eines Bruches zeigt an, in wieviel gleiche Teile eine ursprüngliche Einheit geteilt werden soll. Wird nun derselbe durch m dividiert, also m mal so klein gemacht, so soll jene ursprüngliche Einheit in m mal so wenig gleiche Teile geteilt werden. Dadurch wird aber jeder der neuen Teile m mal so groß, als der bisherige Teil war. Da aber die Anzahl dieser Einheiten unverändert bleibt, so wird der ganze Wert des Bruches m mal so groß.

Beispiele:

1) $\frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{8} = \frac{3}{2}$ oder $\frac{3}{8:4} = \frac{3}{2}$.

2) $\frac{25xy}{36zt} \cdot 63xz = \frac{175x^2y}{4t}$.

3) $\frac{12ab}{(72x^3y^4b)(15mp)} \cdot 18x^3y^4 = \frac{12ab}{4b(15mp)} = \frac{a}{5mp}$.

4) $\frac{2a + 3b}{4ch - 5dh} \cdot (12ch - 15dh) = \frac{2a + 3b}{h(4c - 5d)} \cdot (4c - 5d)3h$
$= 3(2a + 3b)$.

2) Eine ganze Zahl wird mit einem Bruche multipliciert, wenn man dieselbe mit dem Zähler multipliciert und den Nenner unverändert läßt.

Behauptung. $a \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{n}$.

Beweis. Multipliciert man die Zahl a mit dem Zähler m, so entsteht am. Nun hat man aber mit einem n mal zu großen Multiplikator multipliciert, denn m ist n mal so groß als m : n, dadurch

hat man auch ein n mal zu großes Produkt erhalten; daher ist am noch durch n zu dividieren. Z. B. $7 \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$.

Beispiele: 1) $7 \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$.

2) $(5x + 6y) \cdot \frac{7}{15x + 18y} = (5x + 6y) \cdot \frac{7}{3(5x + 6y)} = \frac{7}{3}$.

3) $(432m^2 - 867n^2) \cdot \frac{12m - 17n}{36m + 51n} =$

$3(144m^2 - 289n^2) \cdot \frac{12m - 17n}{3(12m + 17n)} =$

$3(12m + 17n)(12m - 17n) \cdot \frac{12m - 17n}{3(12m + 17n)} =$

$(12m - 17n)^2 =$

$144m^2 - 408mn + 289n^2$.

3) Zwei Brüche werden miteinander multipliciert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert und ersteres Produkt durch letzteres dividiert.

Beweis. Ähnlich, wie im vorigen Satze.

Beispiele: 1) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

2) $\frac{4(x + y)}{5(x - z)} \cdot \frac{15(x - z)}{2(x - y)} = \frac{6(x + y)}{x - y}$.

3) $\frac{16x^2 - 9y^2}{16x^2 - 40xy + 25y^2} \cdot \frac{12x - 15y}{12x + 9y}$.

$= \frac{(4x + 3y)(4x - 3y)}{(4x - 5y)(4x - 5y)} \cdot \frac{3(4x - 5y)}{3(4x + 3y)}$

$= \frac{4x - 3y}{4x - 5y}$.

4) $\frac{48a^2x^2 - 75b^2x^2}{100m^2y^3 - 144n^2y^3} \cdot \frac{10m - 12n}{36ax + 45bx} \cdot \frac{40my + 48ny}{20a - 25b}$

$= \frac{3x^2(16a^2 - 25b^2)}{4y^3(25m^2 - 36n^2)} \cdot \frac{2(5m - 6n)}{9x(4a + 5b)} \cdot \frac{8y(5m + 6n)}{5(4a - 5b)}$

$= \frac{3x^2(4a + 5b)(4a - 5b)}{4y^3(5m + 6n)(5m - 6n)} \cdot \frac{2(5m - 6n)}{9x(4a + 5b)} \cdot \frac{8y(5m + 6n)}{5(4a - 5b)}$

$= \frac{4x}{15y^2}$.

4) Soll ein Polynom mit einem Monom oder umgekehrt, oder ein Polynom mit einem Polynom, deren Glieder Brüche enthalten, multipliciert werden, so geschieht dies nach dem in §. 12 über diese

Fälle entwickelten Gesetze unter Beachtung der Lehrsätze über die Multiplikation der Brüche. Beispiele:

1) $\left(\frac{4a}{3b} - \frac{7c}{5d} + \frac{10e}{11f}\right) \cdot \frac{3b}{2a} = 2 - \frac{21bc}{10ad} + \frac{15be}{11af}$.

2) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) = \frac{ab}{bc} + \frac{ad}{ab} - \frac{bc}{cd} - \frac{cd}{ad} = \frac{a}{c} + \frac{d}{b} - \frac{b}{d} - \frac{c}{a}$.

Erläuterung. Es wurde jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des andern multipliciert nach Satz g) des §. 12. Die erhaltenen Teilprodukte konnten gekürzt werden. Dieselben könnte man nun noch auf den gemeinschaftlichen Nenner abcd bringen. Man hätte auch die Glieder eines jeden Faktors gleichnamig machen und dann erst die Multiplikation ausführen können. Kommen in einer derartigen Aufgabe gemischte Zahlen vor, so werden dieselben erst am zweckmäßigsten eingerichtet, z. B. $\left(a + \frac{b}{n}\right)\left(c + \frac{d}{m}\right) = \frac{an+b}{n} \cdot \frac{cm+d}{m}$ $= \frac{(an + b)(cm + d)}{mn}$. Man vergleiche Beispiele folgender Art $8\frac{2}{3} \cdot 12\frac{3}{4}$ $= \frac{26}{3} \cdot \frac{51}{4}$.

Übungsaufgaben.

S. Aufgabensammlung §. 8.

§. 19. Division von Brüchen.

1) Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler dividiert, bei unverändertem Nenner, oder den Nenner multipliciert, bei unverändertem Zähler.

Behauptung. $\frac{a}{n} : m = \frac{a : m}{n}$ oder $\frac{a}{n \cdot m}$.

Beweis. Dividiert man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{n}$ durch m, so bekommt der Bruch m mal so wenig Teile, somit einen m mal so kleinen Wert. Multipliciert man dagegen den Nenner mit m, so werden aus der Einheit m mal soviel, damit aber m mal so kleine Teile; hiedurch erhält aber der Bruch ebenfalls einen m mal so kleinen Wert.

Beispiele: 1) $\frac{12}{7} : 4 = \frac{12 : 4}{7} = \frac{3}{7}$.

2) $\frac{3}{7} : 4 = \frac{3}{7 \cdot 4} = \frac{3}{28}$.

3) $\frac{81xyz}{10ab} : 9xy = \frac{9z}{10ab}$.

4) $\frac{36ab}{25cd} : -27bd = \frac{4a}{25cd} : -3d = -\frac{4a}{75cd^2}$.

5) $\frac{6ac}{5b} : 7d = \frac{6ac}{35bd}$.

6) $\frac{84am + 84an}{xy} : (12m + 12n)$

$$= \frac{84a(m + n)}{xy} \cdot \frac{1}{12(m + n)} = \frac{7a}{xy}.$$

2) Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man die Zahl mit dem reciproken Werte des Bruches multipliciert.

Behauptung. $m : \frac{a}{n} = m \cdot \frac{n}{a}$.

Beweis. Dividiert man m durch den Zähler a, so erhält man $\frac{m}{a}$. Da man nun durch einen n mal zu großen Divisor dividiert hat, so muß das Resultat n mal zu klein sein; daher muß $\frac{m}{a}$ noch mit n multipliciert werden.

Beispiele: 1) $6 : \frac{5}{8} = 6 \cdot \frac{8}{5} = 9\frac{3}{5}$.

2) $(40x - 72y) : \frac{35x - 63y}{4 + 3x} = 8(5x - 9y) \cdot \frac{4 + 3x}{7(5x - 9y)} = \frac{32 + 24x}{7}$.

3) Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man jenen mit dem reciproken Werte von diesem multipliciert.

Behauptung. $\frac{m}{n} : \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r}$.

Beweis. Dividiert man $\frac{m}{n}$ durch r, so erhält man nach dem ersten Satze $\frac{m}{n \cdot r}$. Da man nun durch einen s mal zu großen Divisor dividiert hat, weshalb das Resultat $\frac{m}{n \cdot r}$ s mal zu klein ist, so muß man dasselbe noch mit s multiplicieren. Es ergibt sich also $\frac{m}{n \cdot r} \cdot s = \frac{m \cdot s}{n \cdot r} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{r}$.

Beispiele: 1) $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$.

2) $\frac{49(x+y)}{36(a+b)} : \frac{35(x+y)}{12(a+b)} = \frac{49(x+y)}{36(a+b)} \cdot \frac{12(a+b)}{35(x+y)} = \frac{7}{15}$.

3) $\frac{18ax - 30ay}{40by - 35bx} : \frac{20ay - 12ax}{80by - 70bx}$

$= \frac{6a(3x - 5y)}{5b(8y - 7x)} \cdot \frac{10b(8y - 7x)}{-4a(3x - 5y)} = -3.$

4) $\frac{10ab - 5b}{3a^2 - 27} : \frac{20a^2b - 20ab + 5b}{a^2 - 3a}$

$= \frac{5b(2a - 1)}{3(a + 3)(a - 3)} \cdot \frac{a(a - 3)}{5b(2a - 1)(2a - 1)}$

$= \frac{a}{3(a + 3)(2a - 1)}.$

4) Aus den Sätzen 1, 2 und 3 folgt, daß die **Division** immer in eine **Multiplikation** verwandelt werden kann; der **Dividend** ist der eine und der **reciproke Wert** des **Divisors** der andere **Faktor**. Dies läßt sich auch so aussprechen: **Dividieren heißt, mit dem reciproken Werte des Divisors multiplicieren.** Hiernach ist $\frac{a}{n} : m = \frac{a}{n} : \frac{m}{1} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{m} = \frac{a}{n \cdot m}$.

5) Kommen in einem Ausdrucke **Multiplikationen** und **Divisionen** von Brüchen vor, so bringt man zweckmäßig zunächst alles auf **einen** Bruchstrich, zerlegt sodann, wenn dies möglich ist, Zähler und Nenner in ihre einfachsten Faktoren, dividiert hierauf Zähler und Nenner durch die gemeinsamen Faktoren und multipliciert schließlich Zähler und Nenner aus. **Beispiele:**

1) $\frac{15ax - 20bx}{18ay + 24by} : \frac{9a - 24ab^2 + 16b^2}{9^2 - 16b^2} \cdot \frac{18xy - 24y}{35x^2 + 25x} =$

$\frac{(15ax - 20bx)(9a^2 - 16b^2)(18xy - 24y)}{(18ay + 24by)(9a^2 - 24ab + 16b^2) \cdot (35x^2 + 25x)} =$

$\frac{5x(3a - 4b)(3a + 4b)(3a - 4b) \cdot 6y(3x - 4)}{6y(3a + 4b)(3a - 4b)(3a - 4b) \cdot 5x(7x + 5)} =$

$\frac{3x - 4}{7x + 5}.$

6) Soll ein Polynom durch ein Monom, oder ein Monom durch ein Polynom, oder endlich ein Polynom durch ein Polynom

dividiert werden und kommen in deren Glieder Brüche vor, so geschieht dies nach den über diese Fälle im §. 13 entwickelten Gesetzen unter Berücksichtigung der Lehrsätze über die Division und Multiplikation der Brüche. Beispiele:

1) $\left(\frac{a}{c}+\frac{bg}{2d}-4ad-5\right):\frac{2c}{d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{d}{2c}+\frac{bg}{2d}\cdot\frac{d}{2c}-4ad\cdot\frac{d}{2c}$ $-5\cdot\frac{d}{2c}=\frac{ad}{2c^2}+\frac{bg}{4c}-\frac{2ad^2}{c}-\frac{5d}{2c}.$

Erläuterung. Man vergleiche Satz g) in §. 13, ferner Satz 4) in §. 19 und endlich Satz 1) in §. 16.

2) $\left(\frac{3a^2}{20}+\frac{7ab}{30}+ac-\frac{8b^2}{9}+\frac{10bc}{3}\right):\left(\frac{3a}{4}-\frac{4b}{3}+5c\right)=\frac{a}{5}+\frac{2b}{3}$

$$\begin{array}{l}\frac{3a^2}{20}-\frac{4ab}{15}+ac\\ \hline \quad\frac{ab}{2}-\frac{8b^2}{9}+\frac{10bc}{3}\\ \quad\frac{ab}{2}-\frac{8b^2}{9}+\frac{10bc}{3}\\ \hline \qquad\qquad 0.\end{array}$$

7) Für Buchstabenausdrücke in Form von Doppelbrüchen gelten dieselben Regeln, wie für Doppelbrüche in Zahlen. Beispiele:

1) $\frac{3}{\frac{4}{5}}=3:\frac{4}{5}=3\cdot\frac{5}{4}=3\frac{3}{4}.$

2) $\frac{x}{\frac{y}{z}}=x:\frac{y}{z}=x\cdot\frac{z}{y}=\frac{xz}{y}.$

3) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{8}{9}.$

4) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$

5) $\frac{x+y-\frac{3(x+2y)}{4}}{x-y-\frac{3(x-2y)}{4}}=\frac{\frac{4x+4y-3x-6y}{4}}{\frac{4x-4y-3x+6y}{4}}=$

$\frac{x-2y}{4}:\frac{x+2y}{4}=\frac{x-2y}{4}\cdot\frac{4}{x+2y}=\frac{x-2y}{x+2y}.$

8) Zusatz. Eine Zahl, die größer gedacht werden soll, als jede noch so große angebliche Zahl, heißt eine unendlich große Zahl und wird mit ∞ bezeichnet. Wird eine von Null verschiedene Zahl durch Null dividiert, so ist der Quotient unendlich groß. In Zeichen: $\frac{a}{0} = \infty$ (zu lesen: „a durch Null gleich unendlich groß").

Beweis. Ein Quotient wird bei konstantem Dividend a mit abnehmendem Divisor immer größer und größer, z. B. $a : 1 = a$; $a : \frac{1}{10} = 10a$; $a : \frac{1}{100} = 100a$; $a : \frac{1}{1000000} = 1000000a$, u. s. w. Jemehr sich also der Divisor der Null nähert, desto größer wird der Quotient, u. s. w.

Übungsaufgaben.

Aufgabensammlung §. 9 und 10; ferner: §. 31, I c und d; II c und d; §. 32 und 33; man vergl Fußnote S. 26.

Zweiter Abschnitt.

Von den Potenzen.

§. 20. Die Potenzen im allgemeinen.

Das Produkt 5 · 5, das aus zwei gleichen Faktoren besteht, kann auch so geschrieben werden, daß man den gleichen Faktor 5 nur einmal setzt, und außerdem durch eine rechts oben angefügte 2 andeutet, daß er zweimal zu nehmen ist, also: 5^2 (zu lesen: „5 hoch 2"). Ebenso kann man statt $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$, statt $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, statt $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ schreiben (zu lesen: „a hoch 5" oder „a zur fünften Potenz", oder kürzer: „a zur fünften"). Hiernach bedeutet also 6^3 so viel als $6 \cdot 6 \cdot 6$, $8^4 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$, $b^5 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$ und der Ausdruck a^n steht für ein Produkt von n gleichen Faktoren, deren jeder a ist. Einen Ausdruck von der Form a^n nennt man eine Potenz und liest ihn: „a hoch n" oder „a zur nten Potenz", oder „a zur nten". Unter einer Potenz[1]) versteht man demnach ein Produkt, das aus zwei oder mehreren gleichen Faktoren besteht. Der zwei- oder mehreremale zu wiederholende Faktor heißt Grundzahl oder Basis, und die rechts oben beigefügte Zahl, welche angibt, wie vielmal die Basis als Faktor zu nehmen ist, der Exponént[2]) der Potenz. Eine Zahl potenzieren, sie in eine Potenz erheben, heißt, sie so oft mal als Faktor setzen, als der Exponent Einheiten hat. Wird eine Zahl zweimal als Faktor gesetzt, so sagt man, sie werde ins Quadrat erhoben, sie werde quadriert, also 2^2, a^2 (zu lesen: „a im Quadrat", oder „a Quadrat"). Eine Zahl kubieren, sie in den Kubus erheben, heißt, sie 3mal als Faktor setzen, also 2^3, a^3 (zu lesen: „a im Kubus" oder „a Kubus"). Setzt man eine Zahl 4mal als Faktor, so erhebt man sie damit ins Biquadrat,

---

1) Lat. potentĭa, das Vermögen, die Gewalt. Die jetzt übliche Bezeichnung und Benennung der Potenzen bürgerte sich im 17. Jahrh. ein; im 16. Jahrh. war der Name dignitas (die Würde) dafür im Gebrauche. 2) Vom lat. exponĕre, herausstellen, anzeigen, also eigentl. Zeiger.

also 2^4, a^4 (zu lesen: „a im Biquadrat"). Die zweite, dritte und vierte Potenz einer Zahl heißt also bezüglich Quadrat, Kubus, Biquadrat[1]).

Aus dem vorhin aufgestellten Begriffe der Potenzierung ergeben sich die nachstehenden zwei Folgerungen: Der Exponent kann nur eine positive ganze Zahl sein und: Die Basis und der Exponent dürfen nicht vertauscht werden. Was jedoch die erstere Folgerung betrifft, so wird später gezeigt werden, daß eine Potenz auch dann einen Sinn hat, wenn der Exponent eine negative oder gebrochene Zahl ist[2]).

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung 3. Auflage, §. 11.

I. Das Potenzieren mit positiven ganzen Exponenten.

§. 21. Addition und Subtraktion von Potenzen.

a) Verschiedenheit der Potenzen inbezug auf Basis und Exponent.

In dieser Beziehung unterscheidet man gleiche, gleichbasige, gleichnamige und ungleiche Potenzen. Gleiche Potenzen sind solche, bei denen sowohl die Basen als auch die Exponenten unter einan-

---

1) Die zweite Potenz einer Zahl a nennt man deshalb das Quadrat der Zahl a, weil dieselbe den Inhalt eines Quadrats darstellt, dessen Seite die Maßzahl a enthält. — Da die dritte Potenz einer Zahl a den Kubikinhalt eines Würfels (Kubus) darstellt, dessen Kante a Längeneinheiten mißt, so nennt man aus diesem Grunde die dritte Potenz einer Zahl den Kubus derselben. — Das Wort Biquadrat bezeichnet: das Quadrat des Quadrats. 2) Die Potenzform kann im Unterrichte viel früher auftreten (man vergl. §. 10, f!). Zugleich haben sich die Schüler die Quadrate der Zahlen 1 bis 25 und die Kuben der Zahlen 1 bis 15 einzuprägen, da dieselben bei der Faktorenzerlegung häufig Anwendung finden (man vergl. §. 14!). Werden an dieser Stelle die Schüler schon über den Zusammenhang zwischen Potenzen, Wurzeln und Logarithmen kurz belehrt, so lassen sich die angegebenen Übungen etwa wie folgt behandeln: „Das Quadrat von 2 ist 4; 2 ist die Quadratwurzel aus 4"; „2 ist der Logarithmus von 4 zur Basis 2", u. s. f. bis 25^2. Oder: „Der Kubus von 2 ist 8; 2 ist die Kubikwurzel aus 8; 3 ist der Logarithmus von 8 zur Basis 2", u. s. f. bis 15^3.

der gleich sind, z. B. $6a^4$ und $9a^4$. Potenzen, die nur einerlei Grundzahlen haben, heißen gleichbasig, z. B. $6a^4$ und $9a^5$. Gleichnamig nennt man Potenzen, die nur einerlei Exponenten haben, z. B. $6a^4$ und $9b^4$. Ungleiche Potenzen endlich sind solche, die sowohl in den Grundzahlen als in den Exponenten verschieden sind, z. B. $11c^4$ und $14d^6$.

b) Gesetz der Addition und Subtraktion der Potenzen.

Nur gleiche Potenzen kann man addieren und subtrahieren; die Addition und Subtraktion gleichbasiger, gleichnamiger und ungleicher Potenzen kann nur angedeutet werden. Sind gleiche Potenzen zu addieren oder zu subtrahieren, so addiert, bezw. subtrahiert man die Koëfficienten und fügt das erhaltene Resultat als Koëfficient der gemeinschaftlichen Potenz bei.

Beweis. Die Richtigkeit der vorstehenden Sätze folgt unmittelbar aus dem unter e) und f) des §. 11 Gesagten. Hiernach ist also $2a^3 + 3a^3 = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 5a^3$.

Beispiele:

1) $(9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2) + (6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3) + (9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3) = ?$

$$\begin{array}{l} 9a^4 - 7a^3b + 15a^2b^2 \\ 6\frac{2}{3}a^4 - 3a^3b + 5a^2b^2 + 6ab^3 \\ \quad + 9\frac{2}{5}a^3b + 10a^2b^2 + ab^3 \\ \hline 15\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{5}a^3b + 30a^2b^2 + 7ab^3. \end{array}$$

2) $7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - (23a^6 - 4a^9) + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - [6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4] - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - (5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6) + 17a^9] =$
$7a^4 - [11a^6 - 5a^4 + 6a^9 - 23a^6 + 4a^9 + 12a^4 + 13a^6 + 17a^9] =$
$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9 =$
$- a^6 - 27a^9$

oder kürzer, indem man sämtliche Klammern auf einmal löst:

$7a^4 - 11a^6 + 5a^4 - 6a^9 + 23a^6 - 4a^9 - 12a^4 - 13a^6 - 17a^9 =$
$- a^6 - 27a^9$.

c) Ordnung der Glieder eines Polynoms.

Kommen in den Gliedern eines Polynoms Potenzen vor, und werden die Exponenten derjenigen Potenzen, welche einen gewissen Buch-

staben als Basis haben, größer, so sagt man, das Polynom sei nach steigenden Potenzen dieses Buchstabens geordnet. Hiernach ist das Polynom $a^2 + 3a^3 - 6a^4 + 9a^5$ nach steigenden Potenzen der Basis a geordnet. Von dem Polynome $5a^4 - 3a^3 + 6a^2 - a$ sagt man, es sei nach fallenden Potenzen der Basis a geordnet. Das Polynom: $3ab^5 - 4a^2b^4 + 6a^3b^3 - 7a^4b^2 + 9a^5b$ ist nach steigenden Potenzen von a und gleichzeitig nach fallenden Potenzen von b geordnet.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 12.

§. 22. Multiplikation von Potenzen.

a) Multiplikation gleichbasiger Potenzen.

1) Potenzen von gleichen Basen werden mit einander multipliciert, indem man die gemeinschaftliche Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

Behauptung. $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3}$. Allgemein: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (lies: „a zur m + nten“).

Beweis. Es ist $a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = aaaaa = a^5$. — Allgemein: Dem Begriffe der Potenz gemäß bedeutet $a^m \cdot a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot m$ mal $\times\, a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot n$ mal. Es sind nun zwei Produkte mit einander zu multiplicieren. Dies geschieht, indem man die Faktoren des einen Produkts als Faktoren zu denen des andern Produkts hinzuschreibt. Thut man dies, so erhält man ein Produkt, in dem der Faktor a zunächst m mal und dann noch n mal, also überhaupt m + n mal enthalten ist. Dafür schreiben wir a^{m+n}. Es ist also $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, w. z. b. w.

Beispiele:

1) $2^2 \cdot 2^3 = 2^5 = 32$ ($2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $4 \cdot 8 = 32$).

2) $8a^3 \cdot 5a^4 \cdot 6a = 240a^{3+4+1} = 240a^8$.

Erläuterung. $6a = 6a^1$; daher die Summe der Exponenten: $3 + 4 + 1 = 8$.

3) $$\frac{3(a+b)^m c^n}{5(g+h)^r} \cdot \frac{7(a+b)^q c^g}{4(g+h)^s} = \frac{21(a+b)^{m+q} c^{g+n}}{20(g+h)^{r+s}}.$$

Erläuterung. $(a + b)^m \cdot (a + b)^q = (a + b)^{m+q}$; denn diese beiden Potenzen haben gleiche Basen, nämlich (a + b); die Exponenten müssen also addiert werden.

2) Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man die Zahl mit jedem einzelnen Summanden potenziert und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliciert.

Behauptung. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Beweis. Umkehrung von Satz 1.

Beispiele:

1) $2^{2+3} = 2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$ $(2^5 = 32)$.

2) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

b) Multiplikation gleichnamiger Potenzen.

1) Potenzen von gleichen Exponenten werden mit einander multipliciert, indem man das Produkt der Basen zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Behauptung. $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. Allgemein: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

Beweis. Es ist $a^2 \cdot b^2 = aa \cdot bb = abab = (ab)^2$. Allgemein: $a^m = a \cdot a \cdot a \cdots m$ mal; $b^m = b \cdot b \cdot b \cdots m$ mal; beide Gleichungen mit einander multipliciert: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots m$ mal $= (a \cdot b)^m$.

Beispiele:

1) $2^4 \cdot 5^4 = 10^4 = 10000$.

2) $(3a - 4b)^m \cdot (3a + 4b)^m = (9a^2 - 16b^2)^m$.

c) Multiplikation ungleicher Potenzen.

Haben die mit einander zu multiplicierenden Potenzen ungleiche Basen und ungleiche Exponenten, so kann die Multiplikation nur angedeutet werden, z. B. $a^2 \cdot b^3$.

d) Multiplikation von Polynomen, deren Glieder Potenzen enthalten.

Ist ein Polynom, dessen Glieder Potenzen enthalten, mit einem Monome oder mit einem andern Polynome zu multiplicieren, so hat man hiebei die in Satz f) und g) des §. 12 enthaltenen Gesetze unter Berücksichtigung der vorstehenden Sätze zu befolgen.

Beispiel:

$$\left(\frac{4a^2}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{4ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}\right) = ?$$

$$\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{5a^4b^4}{8} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^2b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 13.

§. 23. Division von Potenzen.

a) Division gleichbasiger Potenzen.

1) Zwei Potenzen von gleichen Basen werden durch einander dividiert, indem man den Potenzexponenten des Divisors von dem des Dividendus subtrahiert und die gemeinschaftliche Basis mit dieser Differenz potenziert.

Behauptung. $a^4 : a^2 = a^2$. Allgemein: $a^m : a^n = a^{m-n}$. (Es wird hier vorausgesetzt, daß $m > n$; lies: „a zur m — nten").

Beweis. $a^4 : a^2 = aaaa : aa = aa = a^2$. Allgemein: Dem Begriffe der Potenz gemäß ist $a^m : a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot \cdot$ m mal : $a \cdot a \cdot a \cdot \cdot \cdot$ n mal. Es sind nun zwei Produkte durch einander zu dividieren. Dies geschieht, indem man je einen Faktor des einen Produkts durch je einen Faktor des andern Produkts dividiert. Führt man hier die Division aus, so werden dadurch so viele von den Faktoren des Dividendus in 1 verwandelt oder aufgehoben, als Faktoren im Divisor sind. Im Dividend bleiben daher nur $m - n$ Faktoren a übrig. Hiefür wird geschrieben a^{m-n}. Es ist also $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Beispiele: 1) $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ $(32 : 4 = 8)$.
2) $(24a^6b^7c^8d^3) : (8a^4b^5c^4d^2) = 3a^2bc^4d$.
3) $18(x^2 - y^3)^7 : 3(x^2 - y^3)^4 = 6(x^2 - y^3)^{7-4} = 6(x^2 - y^3)^3$.

2) Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man diese Zahl mit dem Minuend und Subtra-

hend potenziert und erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Umkehrung von Satz 1): $a^{m-n} = a^m : a^n$.

b) Division gleichnamiger Potenzen.

Zwei Potenzen von gleichen Exponenten werden durch einander dividiert, indem man den Quotienten der Basen zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Behauptung. $a^4 : b^4 = (a : b)^4$. Allgemein: $a^m : b^m = (a : b)^m$.

Beweis. Es ist $\frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4$.

Allgemein: $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots \text{m mal}}{b \cdot b \cdot b \cdots \text{m mal}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \text{m mal}$
$= \left(\frac{a}{b}\right)^m$.

Beispiel: $\frac{8^3}{2^3} = \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 4^3 = 64$.

c) Division ungleicher Potenzen.

Sind die zur Division vorgelegten Potenzen in Basis und Exponent verschieden, so kann die Division nur angedeutet, nicht ausgeführt werden, z. B. $a^4 : b^3$.

d) Division eines aus Potenzen bestehenden Polynoms durch ein Monom oder ein Polynom.

Es gelten hierüber die in §. 13 entwickelten Gesetze.

Beispiele:

1) $(10a^8b^6 - 7a^7b^5 + 9a^6b^4c^{10}) : 2a^5b^2 = 5a^3b^4 - \frac{7}{2}a^2b^3 + \frac{9}{2}ab^2c^{10}$.

2) $(15a^6 - 46a^4 + 69a^2 - 30) : (3a^2 - 2) = 5a^4 - 12a^2 + 15$

$$15a^6 - 10a^4$$
$$\overline{ - 36a^4 + 69a^2}$$
$$- 36a^4 + 24a^2$$
$$\overline{ 45a^2 - 30}$$
$$45a^2 - 30$$
$$\overline{0.}$$

$$= \frac{3a^2b^3}{4} - \frac{2ab^4}{3}$$

$$3)\left(\frac{3a^5b^3}{5} - \frac{139a^4b^4}{120} + \frac{121a^3b^5}{72} - \frac{41a^3b^6}{32} + \frac{ab^7}{4}\right) : \left(\frac{4a^3}{5} - \frac{5a^2b}{6} + \frac{3ab^2}{2} - \frac{3b^3}{8}\right)$$

$$\frac{3a^5b^4}{5} - \frac{15a^4b^4}{24} + \frac{9a^3b^5}{8} - \frac{9a^2b^6}{32}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} + \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$- \frac{8a^4b^4}{15} - \frac{5a^3b^5}{9} - a^2b^6 + \frac{ab^7}{4}$$

$$0.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl., §. 14.

§. 24. Das Potenzieren der verschiedenen Zahlformen.

a) Das Potenzieren der Zahl Eins, Null und der negativen Zahlen.

Jede Potenz von Eins gibt Eins. Null, in jede Potenz erhoben, gibt Null. Jede gerade Potenz einer negativen Basis gibt ein positives Resultat, jede ungerade ein negatives.

Beweis. Dem Begriffe der Potenz gemäß ist $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, und $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$. Die Richtigkeit des dritten Satzes folgt aus den Sätzen über die Multiplikation negativer Zahlen; denn
$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = +4.$
$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8.$
$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16.$
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32.$
Soll eine negative Zahl potenziert werden, so potenziere man diesem Satze zufolge die absolute Zahl und nehme das Resultat positiv oder negativ, je nachdem der Potenzexponent gerade oder ungerade ist; z. B. $(-a)^{17} = -a^{17}$ und $(-a)^{18} = a^{18}$.

Anmerkung. Dem soeben Gesagten zufolge muß der Ausdruck $-x^2$ wohl von $(-x)^2$ unterschieden werden. Den ersteren lese man: „minus x Quadrat", den letzteren: „minus oder negativ x ins Quadrat" Das Resultat des letzteren ist x^2. Ebenso sind die beiden Ausdrücke: $\frac{1}{2}x^2$ (gelesen: „ein halb

x Quadrat") und $(\frac{1}{2}x)^2$ (gelesen: „ein halb x ins Quadrat") verschieden. Letzterer gibt ausgeführt: $\frac{1}{4}x^2$.

b) Das Potenzieren von Produkten.

Ein Produkt wird mit einer Zahl potenziert, indem man jeden einzelnen Faktor mit der Zahl potenziert und die erhaltenen Potenzen mit einander multipliciert.

Behauptung. $(abc)^3 = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$. Allgemein: $(ab)^m = a^m \cdot b^m$.

Beweis. Es ist: $(abc)^3 = abc \cdot abc \cdot abc = aaa \cdot bbb \cdot ccc = a^3 \cdot b^3 \cdot c^3$. Allgemein: $(ab)^m = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots$ m mal $= a \cdot a \cdot a \cdots$ m mal $\times\ b \cdot b \cdot b \cdots$ m mal $= a^m \cdot b^m$. (Man vergleiche hierzu den Potenzbegriff und das Kommutationsgesetz der Multiplikation!)

Beispiele: 1) $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1000$ $(2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$.

2) $(8xy)^3 = 512x^3y^3$.

c) Das Potenzieren von Quotienten.

Ein Quotient wird mit einer Zahl potenziert, indem man Dividend und Divisor mit dieser Zahl potenziert und erstere Potenz durch die letztere dividiert.

Behauptung. $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$. Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Beweis. Es ist $\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}$.

Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots$ m mal $=$

$$\frac{a \cdot a \cdot a \cdots \text{m mal}}{b \cdot b \cdot b \cdots \text{m mal}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Beispiele: 1) $\left(\frac{8}{2}\right)^3 = \frac{8^3}{2^3} = \frac{512}{8} = 64$ $(= 4^3 = 64)$.

2) $\left(\frac{4a}{5b}\right)^3 = \frac{64a^3}{125b^3}$.

d) Das Potenzieren von Potenzen.

1) Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man ihren Exponenten mit der Zahl multipliciert

und das erhaltene Produkt der Basis als Exponent gibt.

Behauptung. $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$. Allgemein: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis. Es ist $(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12} = a^{3 \cdot 4}$. Allgemein: Dem Begriffe der Potenz gemäß ist $(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdot \cdot$ n mal als Faktor gesetzt. Da Potenzen von gleichen Basen miteinander multipliciert werden, indem man ihre Exponenten addiert, so ist: $a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \cdot \cdot$ n mal $= a^{m+m+m \ldots n \text{ mal}} = a^{mn}$.

Beispiele: 1) $[(a^4b^2c^3)^5]^6 = [a^{20}b^{10}c^{15}]^6 = a^{120}b^{60}c^{90}$.

2) $(-2a^3)^4 + (-2a^4)^3 - (-3a^6)^2 - (-5a^4)^3$.

D. Potenzg. ausgef.: $(16a^{12}) + (-8a^{12}) - (+9a^{12}) - (-125a^{12})$.

D. Kl. aufgelöst: $16a^{12} - 8a^{12} - 9a^{12} + 125a^{12}$.

D. Addition ausgeführt: $124a^{12}$.

e) Das Potenzieren algebraischer Summen.

α) Das Quadrieren algebraischer Summen.

aa) Quadrierung eines Binoms.

Das Quadrat eines Binoms besteht aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkte der zwei Glieder und aus dem Quadrate des zweiten Gliedes.

Beweis. Dem Potenzbegriffe gemäß ist $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$. Diese Multiplikation ausgeführt, erhält man $a^2 + 2ab + b^2$. Ebenso ist $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$.

Beispiele: 1) $43^2 = (40+3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$.

2) $29^2 = (30-1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$.

3) $(3a^2 + 2b^3)^2 = 9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$.

Zusatz. Das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

bb) Quadrierung eines Polynoms.

Das Quadrat eines Polynoms besteht aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Pro-

dukte des ersten und zweiten Gliedes, aus dem Quadrate des zweiten Gliedes, aus der doppelten Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem dritten Gliede, aus dem Quadrate des dritten Gliedes u. s. w., oder: aus dem Quadrate eines jeden Gliedes plus dem doppelten Produkte eines jeden Gliedes mit jedem nachfolgenden.

Behauptung. $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Beweis. Setzt man $a + b = n$, so folgt: $(a + b + c)^2 = (n + c)^2 = n^2 + 2cn + c^2$. In den erhaltenen Ausdruck für n den Wert $a + b$ eingesetzt, ergibt sich: $(a + b)^2 + 2c(a + b) + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. Der Beweis kann auch so geführt werden, daß man sich das Trinom als ein Binom denkt und die Potenzierung nach Gesetz aa ausführt, nämlich $((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$.

Ebenso ist $(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$; denn faßt man $a + b + c$ als eine Zahl auf, so folgt $(a + b + c + d)^2 = [(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2$. Auf gleiche Weise kann die Richtigkeit des obigen Lehrsatzes auch für mehrgliederige Polynome dargethan werden.

Das Quadrieren dekadischer Zahlen. Von obigen Gesetzen kann auch beim Quadrieren numerischer Zahlen mit Vorteil Gebrauch gemacht werden, wie folgende Beispiele zeigen. $148^2 = (100 + 40 + 8)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 40 + 40^2 + 2(100 + 40)8 + 8^2 = 10000 + 8000 + 1600 + 2240 + 64 = 21904$,

oder $2435^2 = (2000 + 400 + 30 + 5)^2 = 2000^2 + 2 \cdot 2000 \cdot 400 + 400^2 + 2 \cdot 2400 \cdot 30 + 30^2 + 2 \cdot 2430 \cdot 5 + 5^2 = 5929225$.

Beispiel:

$$2a^3 - 3b^4 + 4c^5)^2 = 4a^6 - 12a^3b^4 + 9b^8 + 16a^3c^5 - 24b^4c^5 + 16c^{10}.$$

β) Das Kubieren algebraischer Summen.

aa) Kubierung eines Binoms.

Der Kubus eines Binoms besteht aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate des ersten

Gliedes multipliciert mit dem zweiten, aus dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes und aus dem Kubus des zweiten Gliedes.

Beweis. Dem Potenzbegriffe gemäß ist $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$. Nun ist $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ und $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. — Kubierung einer zweistelligen dekadischen Zahl. $(20 + 4)^3 = 20^3 + 3 \cdot 20^2 \cdot 4 + 3 \cdot 20 \cdot 4^2 + 4^3 = 13824$.

bb) Kubierung eines Polynoms.

Der Kubus eines Polynoms besteht aus dem Kubus des ersten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciert mit dem zweiten, aus dem dreifachen ersten Gliede multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Gliedes, aus dem Kubus des zweiten Gliedes, aus dem dreifachen Quadrate der Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem dritten Gliede, aus der dreifachen Summe des ersten und zweiten Gliedes multipliciert mit dem Quadrate des dritten Gliedes, aus dem Kubus des dritten Gliedes u. s. w.

Behauptung. $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$.

Beweis. Faßt man $a + b$ als eine Zahl auf, so folgt: $[(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$. In ähnlicher Weise läßt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung auch für Polynome mit mehr als drei Gliedern darthun. Dekadische Zahlen können in ähnlicher Weise kubiert werden.

Höhere Potenzen. Aus den vorstehend entwickelten Gesetzen ergibt sich auch, wie Ausdrücke folgender Art zu behandeln sind: $(a + b)^4$ oder $(a + b)^6$. Es ist nämlich $(a + b)^4 = [(a + b)^2]^2$ und $(a + b)^6 = [(a + b)^3]^2$.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 15.

II. Das Potenzieren mit negativen ganzen Exponenten.

§. 25. Entstehung und Begriff der Potenzen mit negativen Exponenten.

1) Nach §. 23 Satz a) ist $a^m : a^n = a^{m-n}$. Inbezug auf die besondern Werte der Differenz $m - n$ sind drei Fälle denkbar: es kann nämlich $m > n$, oder $m = n$ oder $m < n$ sein.

2) Ist $m > n$, so muß die Differenz $m - n$ eine positive Zahl sein. In diesem Falle stellt also a^{m-n} eine Potenz mit positivem Exponenten vor. Nur von Potenzen dieser Art war seither die Rede.

3) Wenn $m = n$ ist, so wird nach §. 14 der Ausdruck $a^m : a^n = 1$; denn jede Zahl durch sich selbst dividiert gibt 1 zum Quotienten. Nun ist aber nach Satz a) in §. 23 auch $a^m : a^n = a^{m-n} = a^0$. Hieraus schließen wir: **Jede Potenz, deren Exponent Null ist, ist gleich Eins.**

4) Ist $m < n$, so muß a^{m-n} eine Potenz mit negativem Exponenten vorstellen. Die Bedeutung einer solchen Potenz soll zunächst an einem bestimmten Beispiele gezeigt werden. In dem Beispiele $2^4 : 2^7$ ist 4 um 3 kleiner als 7, mithin ist $7 = 4 + 3$ und $3 = 7 - 4$. Soll nun 2^4 durch 2^7 dividiert werden, so kann man alle Faktoren des Zählers 2^4 gegen den Nenner 2^7 heben; für den letzteren bleiben dann noch $3 = 7 - 4$ Faktoren übrig und der Zähler wird gleich 1. Man erhält mithin als Resultat dieser Division einen Bruch, der zum Zähler 1 und zum Nenner die Anzahl der Faktoren hat, um welche der Divisor größer als der Dividend ist. Es ist also, um das eben Entwickelte kürzer darzustellen:

$$\frac{2^4}{2^7} = \frac{2^4}{2^{4+3}} = \frac{2^4}{2^4 \cdot 2^3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{7-4}}.$$

Wenden wir nun auf dieses Beispiel das in §. 23 Satz a) entwickelte Gesetz an, so erhält man für $2^4 : 2^7 = 2^{4-7} = 2^{-3}$. — Nunmehr wird auch die folgende **allgemeine Entwicklung** verständlicher sein. Es sei in der Aufgabe $a^m : a^n$ der Exponent m um y kleiner als n, mithin $n = m + y$ und $y = n - m$. Alsdann ist, gerade so wie in dem vorigen bestimmten Beispiele, einerseits:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+y}} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^y} = \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{n-m}}$$ und andererseits $a^m : a^n$
$= a^{m-n} = a^{-(n-m)} = a^{-y}$.

Vergleicht man die beiden Resultate $1 : a^y$ und a^{-y} der Aufgabe $a^m : a^n$, sowie die beiden Resultate $1 : 2^3$ und 2^{-3} der Aufgabe $2^4 : 2^7$ mit einander, so gelangen wir hiedurch zu folgendem Schlusse: Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Quotienten, der zum Dividendus 1 und zum Divisor die Potenz mit positivem Exponenten hat.

Unabhängig von vorstehender Entwicklung lassen sich die zwei Sätze $a^o = 1$ und $a^{-n} = 1 : a^n$ auch wie folgt beweisen: 1) $a^o = a^{p-p} = a^p : a^p = 1$. (Vergleiche §. 23, a, 2 und §. 13).

2) $a^{-n} = a^{o-n} = a^o : a^n = 1 : a^n$.

§. 26. Verwandlung von Potenzen mit negativen Exponenten in solche mit positiven Exponenten und umgekehrt.

1) Eine Potenz mit negativem Exponenten kann in eine Potenz mit positivem Exponenten verwandelt werden; steht dieselbe nämlich in dem Zähler eines Bruches, so kann man sie in den Nenner desselben mit positivem Exponenten setzen, und steht sie im Nenner, so kann man sie in den Zähler mit positivem Exponenten bringen.

Behauptung. $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$ und $\frac{1}{a^{-5}} = a^5$. Allgemein: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$.

Beweis. Es ist $a^{-4} = \frac{a^{12}}{a^{16}} = \frac{1}{a^4}$. Allgemein: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (§. 25).

Und: $\frac{1}{a^{-5}} = 1 : \frac{a^{10}}{a^{15}} = 1 \cdot \frac{a^{15}}{a^{10}} = a^5$. Allgemein: $\frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{a^{o-n}} = \frac{1}{\frac{a^o}{a^n}} = \frac{1}{\frac{1}{a^n}} = a^n$.

Beispiel. Hiernach ist: $\frac{3a^{-4}b^5}{4c^{-6}d^3} = \frac{3b^5c^6}{4a^4d^3}$.

2) Mit Hilfe des vorstehenden Satzes kann die Bruchform bei Potenzen ganz vermieden werden, z. B. $a^2 : b^3 = a^2b^{-3}$.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 16.

§. 27. Das Rechnen mit Potenzen, deren Exponenten negativ sind.

Alle in den Paragraphen 22, 23 und 24 abgeleiteten Gesetze des Potenzierens der verschiedenen Zahlformen, sowie des Rechnens mit Potenzen gelten auch dann, wenn die Exponenten der betreffenden Potenzen negative ganze Zahlen sind.

1) Behauptung. $a^4 \cdot a^{-2} = a^{4+(-2)} = a^2$. Allgemein: $a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$.

Beweis. $a^4 \cdot a^{-2} = a^4 \cdot \frac{a^6}{a^8} = a^2$. Allgemein:

$a^m \cdot a^{-n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$.

2) Behauptung. $a^{-5} \cdot a^8 = a^3$. Allgemein: $a^{-m} \cdot a^n = a^{-m+n}$.

Beweis. $a^{-5} \cdot a^8 = \frac{a^5}{a^{10}} \cdot a^8 = a^3$ oder $a^{-5} \cdot a^8 = \frac{1}{a^5} \cdot a^8 = a^3$. Allgemein: $a^{-m} \cdot a^n = \frac{1}{a^m} \cdot a^n = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

3) Behauptung. $a^{-5} \cdot a^{-3} = a^{-8}$. Allgemein: $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$.

Beweis. $a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{a^{15}}{a^{20}} \cdot \frac{a^{30}}{a^{33}} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}$ oder $a^{-5} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^5} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^8} = a^{-8}$. Allgemein: $a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}$.

4) Behauptung. $a^6 : a^{-3} = a^9$. Allgemein: $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$.

Beweis. $a^6 : a^{-3} = a^6 : \frac{a^9}{a^{12}} = a^6 \cdot \frac{a^{12}}{a^9} = a^9$, oder: $a^6 : a^{-3} = a^6 : \frac{1}{a^3} = a^6 \cdot a^3 = a^9$. Allgemein: $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n} = a^{m-(-n)}$.

5) Behauptung. $a^{-4} : a^2 = a^{-6}$. Allgemein: $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$.

Beweis. $a^{-4} : a^2 = \frac{a^{12}}{a^{16}} : a^2 = \frac{a^{12}}{a^{16}} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6} = a^{(-4)-(+2)}$, oder: $a^{-4} : a^2 = \frac{1}{a^4} : a^2 = \frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$.

Allgemein: $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^m\,a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$.

6) Behauptung. $a^{-6} : a^{-9} = a^{-6-(-9)} = a^{-6+9} = a^3$. Allgemein: $a^{-m} : a^{-n} = a^{n-m}$.

Beweis. $a^{-6} : a^{-9} = \frac{a^8}{a^{14}} : \frac{a^6}{a^{15}} = \frac{a^8}{a^{14}} \cdot \frac{a^{15}}{a^6} = a^3$, oder: $a^{-6} : a^{-9} = \frac{1}{a^6} : \frac{1}{a^9} = \frac{1}{a^6} \cdot a^9 = a^3$. Allgemein: $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m-(-n)}$.

7) Behauptung. $a^{-3} \cdot b^{-3} = (ab)^{-3}$. Allgemein: $a^{-n} \cdot b^{-n} = (ab)^{-n}$.

Beweis. $a^{-3} \cdot b^{-3} = \frac{a^6}{a^9} \cdot \frac{b^6}{b^9} = \frac{(ab)^6}{(ab)^9} = (ab)^{-3}$, oder: $a^{-3} \cdot b^{-3} = \frac{1}{a^3} \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{1}{(ab)^3} = (ab)^{-3}$. Allgemein: $a^{-n} \cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{(ab)^n} = (ab)^{-n}$.

8) Behauptung. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$. Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$.

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{b}\right)^5 : \left(\frac{a}{b}\right)^8 = \frac{a^5}{b^5} : \frac{a^8}{b^8} = \frac{a^5}{b^5} \cdot \frac{b^8}{a^8} = \frac{b^3}{a^3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$, oder: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^3} = \frac{1}{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{b^3}{a^3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}$. Allgemein: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$.

9) Behauptung. $(a^3)^{-2} = a^{-6}$. Allgemein: $(a^m)^{-n} = a^{-mn}$.

Beweis. $(a^3)^{-2} = \frac{(a^3)^8}{(a^3)^{10}} = \frac{a^{24}}{a^{30}} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$, oder: $(a^3)^{-2} =$

$\frac{1}{(a^3)^2} = \frac{1}{a^6} = a^{-6}$. Allgemein: $(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m \cdot -n}$.

10) Behauptung. $(a^{-3})^{-2} = a^{-3 \cdot -2} = a^6$. Allgemein: $(a^{-m})^{-n} = a^{mn}$.

Beweis. $(a^{-3})^{-2} = \left(\frac{a^{11}}{a^{14}}\right)^6 : \left(\frac{a^{11}}{a^{14}}\right)^8 = \frac{a^{66}}{a^{84}} : \frac{a^{88}}{a^{112}} = \frac{a^{66}}{a^{84}} \cdot \frac{a^{112}}{a^{88}} = \frac{a^{178}}{a^{172}} = a^6$, oder kürzer: $(a^{-3})^{-2} = \left(\frac{1}{a^3}\right)^{-2} = (a^3)^2 = a^6$. Allgemein: $(a^{-m})^{-n} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^{-n} = (a^m)^n = a^{mn} = a^{(-m) \cdot (-n)}$ *).

Beispiele:

1) $\frac{3a^4b^5}{5c} \cdot \frac{2a^{-5}b^{-6}}{4c^{-4}} = \frac{6a^{-1}b^{-1}}{20c^{-3}} = \frac{3c^3}{10ab}$.

2) $(a + b)^{-4}x^3y^4 \cdot (a + b)^7x^{-5}y^{-5} = \frac{(a + b)^3}{x^2y}$.

3) $\frac{2(x + y)^{-5}z^{-3}}{5u^9t^{-3}} : \frac{4u^{-8}z^{-7}}{5(x + y)^3t^{-2}} = \frac{2(x + y)^{-5}z^{-3}}{5u^9t^{-3}} \cdot \frac{5(x + y)^3t^{-2}}{4u^{-8}z^{-7}} = \frac{(x + y)^{-2}z^{-3}t^{-2}}{2ut^{-3}z^{-7}} = \frac{tz^4}{2(x + y)^2u}$.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 17, 18 und 19.

---

*) Nach meinen Erfahrungen werden die vorstehenden Sätze vom Schüler am besten begriffen, wenn man statt einer Potenz mit negativem Exponenten einen gleichwertigen Quotienten setzt, also $a^{-4} = \frac{a^2}{a^6} = \frac{a^{10}}{a^{14}}$ u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

§. 28. Die Wurzeln im allgemeinen.

a) Begriff: Wurzel einer Zahl.

Die Zahlen 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 u. s. f. sind alle in zwei gleiche Faktoren zerlegbar, nämlich 9 in 3 · 3, 16 in 4 · 4, 25 in 5 · 5 u. s. f. Ebenso lassen sich die Zahlen 8, 27, 64, 125 u. s. w. in je drei gleiche Faktoren zerlegen, 8 in 2 · 2 · 2, 27 in 3 · 3 · 3, 64 in 4 · 4 · 4, 125 in 5 · 5 · 5. Zahlen, wie 16, 81, 256, 625 u. s. f. können in 4 gleiche Faktoren zerfällt werden, nämlich 16 in 2 · 2 · 2 · 2, 81 in 3 · 3 · 3 · 3, 256 in 4 · 4 · 4 · 4, 625 in 5 · 5 · 5 · 5. Diese gleichen Faktoren, in welche sich Zahlen zerlegen lassen, heißen Wurzeln der Zahlen. Unter der Wurzel einer Zahl versteht man demnach den einen der gleichen Faktoren, in welche sich diese zerlegen läßt. Die Zahl, welche angibt, in wieviel gleiche Faktoren eine gegebene Zahl zerlegt werden soll, heißt der Wurzelexponent. Die zu zerlegende Zahl führt den Namen Radikand. Das Geschäft der Zerlegung einer Zahl in zwei oder mehrere gleiche Faktoren nennt man das Wurzelausziehen oder Radicieren. Diese Operation wird durch das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ (ein verzogenes r, der Anfangsbuchstabe des Wortes radix, Wurzel) angedeutet, unter welches der Radikand, über welches der Wurzelexponent geschrieben wird [1]). Der Ausdruck $\sqrt{25}$ bedeutet also, der Radikand 25 soll in 2 gleiche Faktoren zerlegt werden. Jeder Ausdruck, vor dem sich ein Wurzelzeichen befindet, heißt ein Wurzelausdruck (Wurzel-

---

1) Die jetzt übliche Schreibweise der Wurzeln wurde zuerst von Christoph Rudolph im 16. Jahrh. eingeführt.

größe). Unter der *Quadratwurzel* oder *zweiten Wurzel* einer Zahl versteht man den einen der zwei gleichen Faktoren, in welche die Zahl zerlegt werden kann. So ist 2 die Quadratwurzel aus 4. Die symbolische Bezeichnung für das Ausziehen der Quadratwurzel ist: $\sqrt[2]{4}$, oder $\sqrt{4}$, allgemein $\sqrt{a}$ (man liest: Quadratwurzel aus a). Den einen der 3 gleichen Faktoren, in die sich eine Zahl zerlegen läßt, nennt man die *Kubikwurzel* oder *dritte Wurzel* dieser Zahl; 3 ist also die Kubikwurzel aus 27 (Bezeichnung: $\sqrt[3]{27}$, gelesen: Kubikwurzel aus 27). Endlich versteht man unter der *Biquadratwurzel* oder *vierten Wurzel* einer Zahl den einen der 4 gleichen Faktoren, in welche die Zahl zerfällbar ist; 2 ist also die Biquadratwurzel aus 16.

b) *Rationale und irrationale Zahlen.*

Das Quadrat von $\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$; der Kubus von $\frac{5}{2} = \frac{125}{8}$. Diese zwei Beispiele zeigen, *daß die Potenz eines eigentlichen Bruches wiederum ein Bruch ist.* Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nachweisen, daß die Wurzeln vieler Zahlen weder durch ganze Zahlen, noch durch gemischte Zahlen genau darstellbar sind. Aus den Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 sind die Quadratwurzeln der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7; allein aus den dazwischen liegenden Zahlen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 u. s. w. lassen sich die Quadratwurzeln nicht genau ausziehen; denn angenommen, die Quadratwurzel aus 8 existiere, so müßte diese eine Zahl sein, die zwischen 2 und 3 läge, weil $2 \cdot 2 = 4$, also weniger als 8 und $3 \cdot 3 = 9$, also mehr als 8 ist; sie müßte also eine *gemischte Zahl sein.* Da nun aber ein eigentlicher Bruch, ins Quadrat erhoben, keine *ganze Zahl* gibt, so folgt, daß sich die Quadratwurzel aus 8 nicht vollständig angeben läßt. Selbstverständlich gilt das Gesagte auch für $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{26}$, $\sqrt[4]{17}$ u. s. w.

Obgleich nun von sehr vielen Zahlen keine vollständige Quadratwurzel u. s. w. existiert, so lassen sich doch für alle positiven Zahlen näherungsweise alle Wurzeln bestimmen. Zahlen, die sich weder durch ganze Zahlen, noch durch Brüche genau darstellen lassen, heißen *irrationale Zahlen*; solche sind z. B. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. Alle

bisher betrachteten Zahlen dagegen, nämlich alle ganzen und gebrochenen, sowohl positiven als negativen Zahlen, heißen rationale[1]) Zahlen.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 20.

§. 29 Das Ausziehen der Quadratwurzel aus bestimmten Zahlen.

a) Grund der Einteilung des Radikanden in Klassen zu zwei Stellen.

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10000$
$2^2 = 4$	$60^2 = 3600$	$300^2 = 90000$
$4^2 = 16$	$80^2 = 6400$	$450^2 = 202500$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9801$	$999^2 = 998001.$

Aus diesen Beispielen geht hervor:

Das Quadrat

einer	1	ziffg.	Zahl ist entweder eine	1	oder	2	ziffg.	Zahl,
„	2	„	„ „ „ „	3	„	4	„	„
„	3	„	„ „ „ „	5	„	6	„	„
„	4	„	„ „ „ „	7	„	8	„	„
„	5	„	„ „ „ „	9	„	10	„	„
„	n	„	„ „ „ „	(2n—1)	„	2n	„	„

Mit Worten: Das Quadrat einer Zahl enthält entweder doppelt so viel Stellen als dieselbe, oder doppelt so viele Stellen weniger eine.

Umgekehrt ist auch die Quadratwurzel aus

jeder	1	und	2	ziffg.	Quadratzahl eine	1	ziffg.	Zahl,
„	3	„	4	„	„ „	2	„	„
„	5	„	6	„	„ „	3	„	„
„	7	„	8	„	„ „	4	„	„
„	9	„	10	„	„ „	5	„	„
„	(2n—1)	„	2n	„	„ „	n	„	„

Man teilt daher beim Ausziehen der Quadratwurzel den Radikanden von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu zwei Stellen ein. So viele Klassen dann der Radikand hat, so viele Stellen hat die Wurzel.

1) Rational, völlig ausrechenbar, vom lat. ratio (-onis), Rechnung, Berechnung. Irrational, nicht völlig ausrechenbar (ir, verneinende Vorsilbe, statt in vor Wörtern, die mit r anfangen; vergl. auch: regulär, irregulär).

b) Das Ausziehen der Quadratwurzel aus positiven ganzen Zahlen.

α) Die Zahlen sind vollkommene Quadrate.

1) $\sqrt{7921}$ *) = ?

1) Aus a dieses §. folgt, daß die zu suchende Quadratwurzel eine zweizifferige Zahl ist, weshalb man sie durch $(a + b)$ darstellen kann; a bezeichnet die Anzahl der Zehner, b die der Einer. Mithin ist $7921 = (a + b)^2$. Da nun $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, so ist eigentlich nur die Aufgabe gestellt, die Zahl 7921 in die Zahlenwerte dieser drei Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine bestimmte Anzahl Zehner, also a^2 eine gewisse Anzahl Hunderter, d. h. eine Zahl, die am Schlusse zwei Nullen hat. Mithin müssen die Ziffern des Zahlenwertes a^2 in der Klasse links, nämlich in 79, d. h. 7900 enthalten sein; mit andern Worten: a^2 stellt eine Zahl vor, die höchstens 7900 betragen kann. Nun sind die Quadrate der Zehner der Reihe nach 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100; da 7900 zwischen 6400 und 8100 liegt, so muß die zu suchende Quadratwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Das höchste vollständige Quadrat, welches in 7900 enthalten ist, ist 6400, mithin ist $a^2 = 6400$, also a (der Zehner) = 80. Der erste Teil der Wurzel oder a ist demnach = 80.

3) Subtrahiert man nun den Zahlenwert von a^2, nämlich 6400, von 7921, welche Zahl $= a^2 + 2ab + b^2$ ist, so muß der Rest 1521 $= 2ab + b^2$ sein. Das Glied 2ab ist ein Produkt aus Einern und Zehnern; es hat folglich keine Einer, stellt also eine Zahl vor, die am Ende eine Null hat; mithin kann von den Ziffern des Zahlenwertes 2ab in der letzten Ziffer 1 des Restes 1521 nichts enthalten sein, sie müssen in 152, d. h. 1520 stecken (2ab stellt eine Zahl vor, die höch-

*) Es empfiehlt sich, zunächst vor den Augen der Schüler das Quadrat 7921 durch Quadrieren der Zahl 89 entstehen zu lassen; nämlich: $(a + b)^2 = 89^2 = (80 + 9)^2$:

$$\begin{array}{rcrcr} a^2 & = & 80^2 & = & 6400 \\ 2ab & = & 2 \,.\, 80 \,.\, 9 & = & 1440 \\ b^2 & = & 9^2 & = & 81 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 & = & 80^2 + 2 \,.\, 80 \,.\, 9 + 9^2 & = & 7921. \end{array}$$

stens 1520 betragen kann). Es ist nun einleuchtend, daß b gefunden wird, wenn man mit 2a, nämlich 160 in 1520 dividiert. Da 160 in 1520 neunmal enthalten ist, so ist dieser Quotient $9 = b$, also $2ab = 2 \cdot 80 \cdot 9 = 1440$.

4) Subtrahiert man $2ab = 1440$ von $2ab + b^2 = 1521$, so bleibt $b^2 = 81$; da nun $b = 9$, also $b^2 = 81$ ist, diese Zahl aber den noch übrig bleibenden Rest von 81 aufhebt, so folgt, daß die gesuchte Quadratwurzel $80 + 9 = 89$ ist.

Es ist also:

$$\begin{aligned} a^2 &= 80^2 &&= 6400 \\ 2ab &= 2 \cdot 80 \cdot 9 &&= 1440 \\ b^2 &= 9^2 &&= 81 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 &= 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 9 + 9^2 &&= 7921. \end{aligned}$$

Für das Rechnen empfiehlt sich folgende übersichtliche Anordnung:

$$\begin{array}{rl} & a + b,\ a^2 + 2ab + b^2 \\ \sqrt{79|21} & = 80 + 9 \\ a^2 = 6400 & \\ \hline 2a = 160\text{*)}\,|1521 & \\ 2ab = \quad 1440 & \\ \hline 81 & \\ b^2 = 81 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Die Bestimmung von 2ab und b^2 läßt sich in folgender Weise zusammenfassen:

$$\begin{array}{rl} & a + b,\ a^2 + 2ab + b^2 \\ \sqrt{79|21} & = 80 + 9 \\ a^2 = 6400 & \\ \hline 2a = 160|1521 & \\ 2ab + b^2 = 1521 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

---

*) Der Dividendus gehört zwar vor den Divisor, allein beim Wurzelausziehen soll, größerer Übersicht halber, der Divisor vor den Dividendus gestellt werden. Wer gegen diese Stellung Bedenken hat, der schreibe 1521 : ($2a = 160$) u. s. w.

Dies Verfahren kann durch Weglassung der Nullen in folgender Art abgekürzt werden:

$$a + b,\ a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\sqrt{79|21} = 8 \quad 9$$

$$a^2 = 64$$

$$2a = 16 \mid 1521$$

$$2ab + b^2 = 1521$$

$$0.$$

$$2)\ \sqrt{474721} = ?$$

1) Der Radikand ist eine sechsziffrige Zahl, mithin wird die zu suchende Quadratwurzel dreiziffrig, kann also durch $(a + b + c)$ dargestellt werden; a bedeutet die Hunderter, b die Zehner und c die Einer der zu suchenden Quadratwurzel. Mithin ist $474721 = (a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. In diese 5 Glieder muß die Zahl 474721 zerlegt werden.

2) Da a^2 das Quadrat einer gewissen Anzahl von Hundertern bezeichnet, so stellt dieser Ausdruck eine Zahl vor, die am Schlusse vier Nullen hat, kann also im vorliegenden Falle höchstens 470000 betragen. Diese Zahl ist aber nicht das Quadrat eines Hunderters, sondern die darunter liegende Zahl 360000, und zwar ist diese das Quadrat von 600. Demnach ist der erste Teil der Wurzel 600.

3) In dem Reste 114721 sind noch die Werte von 2ab, b^2, $2(a + b)c$ und c^2 enthalten. Der Ausdruck 2ab stellt eine Zahl vor, die am Schlusse drei Nullen hat, die also im vorliegenden Falle höchstens 114000 betragen kann. Man findet nun b, wenn man mit $2a = 1200$ in 114000 dividiert. 1200 ist in 114000 achtzigmal enthalten. Demnach beträgt der zweite Teil der Wurzel $= 80$. Man kann nun $2ab = 96000$ und $b^2 = 6400$, zusammen $2ab + b^2 = 102400$ von 114721 subtrahieren.

4) In dem Reste 12321 sind noch die Zahlenwerte von $2(a + b)c$ und c^2 enthalten. $2(a + b)c$ stellt eine Zahl vor, die aus der doppelten Summe von Hundertern und Zehnern mit Einern multipliciert besteht; diese muß daher am Schlusse eine Null haben, kann also nur höchstens 12320 betragen. Dividiert man demnach mit $2(a + b) = 1360$ in 12320, so muß man c erhalten. Nachdem man $c = 9$ bestimmt hat, kann man $2(a + b)c = 12240$ und $c^2 = 81$, zusammen 2(a

$+ b)c + c^2 = 12321$ von 12321 subtrahieren. — Das Gesagte läßt sich in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \;+\; b \;+\; c,\; a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2. \\ \sqrt{474721} = 600 + 80 + 9 = 689 \\ a^2 = 360000 \\ \hline 2a = 1200 \mid 114721 \\ 2ab + b^2 = 102400 \\ \hline 2(a+b) = 1360 \mid 12321 \\ 2(a+b)c + c^2 = 12321 \\ \hline \qquad\qquad 0. \end{array}$$

5) Durch Weglassung der Nullen läßt sich dieses Verfahren abkürzen, nämlich so:

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a+b+c,\; a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2. \\ \sqrt{47|47|21} = 6\ 8\ 9 \\ a^2 = 36 \\ \hline 2a = 12|1147 \\ 2ab + b^2 = 1024 \\ \hline 2(a+b) = 136|12321 \\ 2(a+b)c + c^2 = 12321 \\ \hline \qquad\qquad 0. \end{array}$$

Erläuterung. Zunächst teilt man den Radikanden von rechts nach links in zweistellige Klassen. Da man 3 Klassen erhält, so muß die Wurzel dreizifferig werden; ihre Hunderter bezeichnet man mit a, ihre Zehner mit b und ihre Einer mit c. Das Quadrat hievon ist $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. a^2 bezeichnet eine Zahl, die vier Nullen hat; die werthabenden Ziffern derselben sind also nur in 47 enthalten. Daher bestimmt man diejenige größte ganze Zahl, deren Quadrat in 47 enthalten ist. Diese ist hier 6 (eigentlich 600). Man subtrahiert nun $a^2 = 36$ von 47 und setzt zu dem Reste 11 bloß die nächste Klasse 47 herunter. Man braucht nur eine Klasse herunterzusetzen, weil die Zahlenwerte von 2ab und b^2, die jetzt zu bestimmen sind, zusammen eine Zahl ergeben, die zwei Nullen hat. Um b zu finden, dividiert man nun mit $2a = 12$ in 114 und nicht in 1147, weil 2ab eine Zahl vorstellt, die 3 Nullen hat u. s. w.

$a + b + c + d, a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2.$

3) $\sqrt{32171584} = 5000 + 600 + 70 + 2 = 5672$

$a^2 = 25000000$

$2a = 10000 \mid 7171584$

$2ab + b^2 = 6360000$

$2(a + b) = 11200 \mid 811584$

$2(a + b)c + c^2 = 788900$

$2(a + b + c) = 11340 \mid 22684$

$2(a + b + c)d + d^2 = 22684$

0.

Mit Weglassung der Nullen und der Buchstabenausdrücke.

$\sqrt{32|17|15|84} = 5672$

25

10|717

636

112|8115

7889

1134|22684

22684

0.

4) $\sqrt{25|83|68|89} = 5083$

25

100|8368

8064

1016|30489

30489

0.

5) $\sqrt{9|00|24|00|16} = 30004$

9

6000|240016

240016

0.

β) Die Zahlen sind keine vollkommenen Quadrate.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{5} = 2{,}23606\ \ldots\\
\phantom{\sqrt{5} = }4\\
\hline
4|100\\
84\\
\hline
44|1600\\
1329\\
\hline
446|27100\\
26796\\
\hline
44720|3040000\\
2683236.
\end{array}
$$

Erläuterung. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{5}$ muß demnach zwischen 2 und 3 liegen. Der Zahl 5 kann man sich, ohne ihren Wert zu verändern, eine Reihe von Nullen als Dezimalstellen angehängt denken, also 5,00000000. Je zwei solcher Nullen setzt man nun nach einander als eine Klasse herab und verfährt im übrigen nach der oben gelehrten Methode.

c) Das Ausziehen der Quadratwurzel aus Bruchzahlen.

α) Aus Dezimalbrüchen.

$0{,}1^2 = 0{,}01$	$0{,}01^2 = 0{,}0001$	$0{,}001^2 = 0{,}000001$
$0{,}5^2 = 0{,}25$	$0{,}02^2 = 0{,}0004$	$0{,}002^2 = 0{,}000004$
$0{,}6^2 = 0{,}36$	$0{,}09^2 = 0{,}0081$	$0{,}007^2 = 0{,}000049$
$0{,}9^2 = 0{,}81$	$0{,}98^2 = 0{,}9684$	$0{,}367^2 = 0{,}134689.$

Aus diesen Beispielen ergibt sich folgendes:

Die Quadratzahlen der Zehntel sind Hundertstel, die der Hundertstel Zehntausendstel, die der Tausendstel Milliontel. *Mithin hat die Quadratzahl eines Dezimalbruchs immer doppelt soviel Stellen als dieser.* Aus diesem Grunde wird auch jeder Dezimalbruch, aus dem die Quadratwurzel gezogen werden soll, in Klassen zu je zwei Ziffern eingeteilt (vom Komma aus nach rechts, falls Ganze vorhanden sind, selbstverständlich auch nach links). Hat die letzte Klasse der Dezimalen nur eine Stelle,

so wird eine Null angehängt. Im übrigen ist das Verfahren dem bisherigen ganz analog.

1) $\sqrt{0{,}11|90|25} = 0{,}345$

```
   9
 ----
 6|290
   256
 ------
68|3425
   3425
 ------
      0.
```

2) $\sqrt{14|43{,}84|80|04} = 37{,}998$

```
      9
   ------
      6|543
        469
   ------
     74|7484
        6741
   ------
    758|74380
        68301
   ------
   7598|607904
        607904
   ------
             0.
```

β) Aus gemeinen Brüchen.

Sind Zähler und Nenner rational, so zieht man aus beiden die Quadratwurzel. Ist dies nicht der Fall, so kann man den Bruch derartig erweitern, daß der Nenner rational wird, *oder man verwandelt den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch* und zieht dann aus diesem die Quadratwurzel.

γ) Aus gemischten Zahlen.

Man verwandelt dieselben in unechte Brüche und verfährt dann wie bei β).

Fassen wir nun das ganze Verfahren, das beim Ausziehen der Quadratwurzel einzuschlagen ist, kurz und bündig zusammen, so ergibt sich:

1) Man teilt die gegebene Quadratzahl von rechts nach links in Klassen zu je 2 Stellen; die Zahl der Klassen ist gleich der Anzahl der Stellen in der Wurzel.

2) Man sucht eine Zahl, deren Quadrat das größte ist, welches von der ersten Klasse links des gegebenen Quadrats zu subtrahieren ist; sie ist die erste Ziffer der Wurzel.

3) Zu dem Reste, den man erhält, wenn man das Quadrat dieser ersten Ziffer der Wurzel von der ersten Klasse des gegebenen Quadrats subtrahiert, schreibt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts eine Ziffer abgestrichen und dividiert mit dem Doppelten der bereits gefundenen Wurzel in das Übrige.

4) Nun multipliciert man den erhaltenen Quotienten, die zweite Ziffer der zu suchenden Wurzel, mit sich selbst, dann mit dem letzten Divisor und subtrahiert das erhaltene Produkt.

5) Sodann nimmt man die nächste Klasse herunter, denkt sich rechts wieder eine Ziffer abgestrichen u. s. w. (3 u. 4).

6) Dies Verfahren wird solange fortgesetzt, bis alle Klassen herunter genommen sind. Geht die Rechnung auf, so ist die Wurzel genau gefunden; geht sie nicht auf, so setzt man statt der fehlenden Ziffer Nullenpaare herunter und macht in der Wurzel das Dezimalkomma.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 21.

§. 30. Das Ausziehen der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen.

a) Grund der Einteilung des Radikanden in Klassen zu drei Stellen.

$1^3 = 1$	$10^3 = 1000$	$100^3 = 1000000$
$3^3 = 27$	$59^3 = 505379$	$451^3 = 91733851$
$9^3 = 729$	$99^3 = 970299$	$999^3 = 997002999.$

Diese Beispiele lehren:

Der Kubus

einer	1	zff.	Zahl	ist	entweder	eine	1, 2	oder	3	zff.	Zahl,
„	2	„	„	„	„	„	4, 5	„	6	„	„ ,
„	3	„	„	„	„	„	7, 8	„	9	„	„ ,
„	4	„	„	„	„	„	10, 11	„	12	„	„ ,
„	n	„	„	„	„	„	(3n—2),(3n—1)	.	3n	„	„ .

Mithin ist auch die Kubikwurzel aus

jeder	1,	2	oder	3	ziffg.	Zahl	eine	1	ziffg.	Zahl,
„	4,	5	„	6	„	„	„	2	„	„ ,
„	7,	8	„	9	„	„	„	3	„	„ ,
„	10,	11	„	12	„	„	„	4	„	„ ,
„	(3n—2),	(3n—1)	„	3n	„	„	„	n	„	„ .

Man teilt daher beim Ausziehen der Kubikwurzel den Radikanden von rechts nach links durch senkrechte Striche in Klassen zu drei Stellen ein. *So viele Klassen dann der Radikand hat, so viele Stellen hat die Wurzel.*

b) *Das Ausziehen der Kubikwurzel aus ganzen Zahlen.*

1) $\sqrt[3]{658503} = ?$

1) Nach a dieses §. ist die zu suchende Kubikwurzel eine zweizifferige Zahl, mithin ist sie durch $(a + b)$ darstellbar, und die gegebene Zahl 658503 selbst kann durch $(a + b)^3$ ausgedrückt werden. Da nun $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so hat man hier die Aufgabe zu lösen, die Zahl 658503 in die Zahlenwerte dieser vier Glieder zu zerlegen.

2) a bedeutet eine gewisse Anzahl Zehner, also a^3 eine bestimmte Anzahl Tausender, d. h. eine Zahl, die am Schlusse 3 Nullen hat. Demnach können die Ziffern des Zahlenwertes von a^3 nicht in den 3 letzten Ziffern der Zahl 658503, nämlich in 503, sondern müssen in der Klasse links, nämlich in 658, d. h. 658000 stecken. Nun sind die Kuben der Zehner der Reihe nach 1000, 8000, 27000, 64000, 125000, 216000, 343000, 512000, 729000. Da 658000 zwischen 512000 und 729000 liegt, so muß die zu suchende Kubikwurzel zwischen 80 und 90 liegen. Der höchste vollständige Kubus eines Zehners, der in 658000 steckt, ist 512000, mithin ist $a^3 = 512000$ und $a = 80$. Der erste Teil der Wurzel ist also 80.

3) Subtrahiert man nun den Zahlenwert von a^3, nämlich 512000 von 658503, welche Zahl $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ist, so muß der Rest $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ sein. a steht für eine gewisse

Anzahl Zehner, mithin a^2 für Hunderter; der Ausdruck $3a^2b$ ist demnach ein Produkt aus Hundertern und Einern; die Zahl, welche von diesem Gliede repräsentiert wird, hat mithin am Schlusse zwei Nullen. Deshalb ist von der Zahl, deren Stellvertreter $3a^2b$ ist, in den 2 letzten Ziffern des Restes, nämlich in 03 nichts enthalten; sie kann also nur in den 4 ersten, nämlich in 1465, d. i. 146500 enthalten sein. Da nun $3a^2b : 3a^2 = b$ ist, so folgt, daß b erhalten wird, indem man die Zahl 146500 durch $3a^2$, d. h. $3 \cdot 80^2 = 19200$ dividiert. Der erhaltene Quotient 7 muß mithin b und daher $3a^2b = 3 \cdot 80^2 \cdot 7 = 134400$ sein.

4) Subtrahiert man nun den Zahlenwert $3a^2b = 134400$ von dem Reste $146503 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so muß der nunmehrige Rest, nämlich $12103 = 3ab^2 + b^3$ sein. Der Ausdruck $3 \cdot 40 \cdot 3^2$, ein Produkt von Zehnern und dem Quadrate von Einern, hat, als eine Zahl dargestellt, nämlich als 1080, am Schlusse rechts eine Null; mithin muß auch die Zahl, welche von dem Gliede $3ab^2$ repräsentiert wird (es ist ein Produkt von Zehnern und dem Quadrate von Einern) am Schlusse rechts eine Null haben. Folglich müssen die Ziffern dieses Zahlenwertes in den vier ersten Ziffern des Restes 12103, nämlich in 1210, d. i. 12100 enthalten sein. Subtrahiert man daher $3ab^2 = 3 \cdot 80 \cdot 7^2 = 11760$ von dem Reste $12103 = 3ab^2 + b^3$, so muß der Rest $343 = b^3$ sein.

5) Da nun $b^3 = 7^3 = 343$ den Rest 343 tilgt, so ist die Kubikwurzel gefunden; sie heißt $80 + 7 = 87$.

Es ist also:

$$\begin{array}{rcrcr} a^3 & = & 80^3 & = & 512000 \\ 3a^2b & = & 3 \cdot 80^2 \cdot 7 & = & 134400 \\ 3ab^2 & = & 3 \cdot 80 \cdot 7^2 & = & 11760 \\ b^3 & = & 7^3 & = & 343 \\ \hline \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 80^3 + 3 \cdot 80^2 \cdot 7 + 3 \cdot 80 \cdot 7^2 + 7^3 = 658503.$$

Diese Rechnungen lassen sich in folgender Weise übersichtlich darstellen:

$$\sqrt[3]{658|503} = \overset{a}{80} + \overset{b}{7} = 87$$

$$\begin{array}{rcrl} & & a^3 = 512000 & \\ \hline 3a^2 & = & 19200|146503 & - \\ 3a^2b & = & 134400 & \left.\right\} \\ 3ab^2 & = & 11760 & \left.\right\} = 146503 \\ b^3 & = & 343 & \left.\right\} \\ \hline & & 0. & \end{array}$$

Durch Weglassung der Nullen kann man wie folgt abkürzen:

$$\sqrt[3]{658|503} = 8\ 7$$

$$\begin{array}{rcll} a^3 & = & 512 & \\ \hline 3a^2 & = & 192|146503 & — \\ 3a^2b & = & 1344 & \multirow{4}{*}{$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 146503$} \\ 3ab^2 & = & 1176 & \\ b^3 & = & 343 & \\ \hline & & 0. & \end{array}$$

2) $\sqrt[3]{123505992} = ?$

Die Kubikwurzel aus dieser Zahl muß eine dreizifferige Zahl sein, weshalb sie durch $(a + b + c)$, die Zahl 123505992 selbst durch $(a + b + c)^3$ darstellbar ist. Da nun $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3$ ist, so folgt, daß die gegebene Zahl in die Zahlenwerte dieser 7 Glieder zu zerlegen ist. Die Schlüsse sind in diesem Beispiele selbstverständlich dieselben, wie im ersten, weshalb sie nur angedeutet werden sollen.

$$\sqrt[3]{123|505|992} = 498$$

$$\begin{array}{rcll} a^3 & = & 64 & \\ \hline 3a^2 & = & 48|59505 & — \\ 3a^2b & = & 432 & \\ 3ab^2 & = & 972 & \Big\} = 53649 \\ b^3 & = & 729 & \\ \hline 3(a + b)^2 & = & 7203|5856992 & — \\ 3(a + b)^2c & = & 57624 & \\ 3(a + b)c^2 & = & 9408 & \Big\} = 5856992 \\ c^3 & = & 512 & \\ \hline & & 0. & \end{array}$$

c) **Das Ausziehen der Kubikwurzel aus unvollständigen Kuben, aus Dezimalbrüchen, gemeinen Brüchen und gemischten Zahlen.**

Wie hiebei zu verfahren ist, ergibt sich aus den analogen Fällen der Quadratwurzelausziehung.

Das Verfahren, das beim Ausziehen der Kubikwurzel zu befolgen ist, geht aus den vorstehenden zwei Beispielen klar hervor. Fassen wir es kurz und bündig zusammen:

1) Man teilt die gegebene Zahl von den Einern an in Klassen zu je 3 Ziffern (die äußerste Klasse links kann auch nur 1 oder 2 Ziffern enthalten).

2) Von der ersten Klasse links subtrahiert man die möglichst große Kubikzahl und schreibt die zugehörige Wurzel als ersten Teil der zu suchenden Wurzel.

3) Zum Reste nimmt man die Ziffern der nächsten Klasse herunter und denkt sich rechts 2 Stellen abgestrichen.

4) Das Übrige dividiert man durch das dreifache Quadrat des gefundenen ersten Teils der Wurzel.

5) Den so erhaltenen Quotienten schreibt man als zweiten Teil der gesuchten Wurzel.

6) Man multipliciert ihn nun mit dem letzten Divisor und setzt dies Produkt unter das in 3) erhaltene Resultat so, daß die letzte Ziffer unter die drittletzte zu stehen kommt; sodann bildet man ein Produkt aus dem Quadrat des Quotienten und dem 3fachen des ersten Teils der Wurzel und schreibt es von der vorletzten Stelle an unter; endlich setzt man noch den Kubus des Quotienten, von der letzten Stelle des Resultats in 3) angefangen, unter, addiert diese 3 Produkte und subtrahiert sie hierauf von dem Resultate 3).

7) Bleibt ein Rest, so wird die Rechnung, nach den Regeln von 3) angefangen, fortgesetzt.

8) Bei irrationalen Kubikwurzeln hängt man dem Reste jedesmal 3 Nullen an.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl., §. 22.

§. 31. Das Radicieren der verschiedenen Zahlformen.

I. Das Radicieren von Monomen.

a) Die aus dem Begriffe des Radicierens sich unmittelbar ergebenden Gesetze.

1) Wird eine Wurzel mit ihrem Wurzelexponenten potenziert, so erhält man den Radikanden.

Behauptung. $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Beweis. Nach §. 28 versteht man unter „Wurzel einer Zahl" einen der gleichen Faktoren, in welche diese Zahl zerlegbar ist. Dieser Definition zufolge muß man die ursprüngliche Zahl, den Radikanden, wieder erhalten, wenn man die Wurzel derselben so vielmal als Faktor setzt, als die Anzahl der gleichen Faktoren beträgt, oder, kürzer ausgedrückt, wenn man die Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert. Ist also $\sqrt{25} = 5$, so muß $5 \cdot 5 = 5^2$ oder $(\sqrt{25})^2 = 25$ sein. Ebenso ist $(\sqrt{a})^2 = a$ und $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

2) Wird eine Potenz durch ihren Exponenten radiciert, so erhält man ihre Basis.

Behauptung. $\sqrt[n]{a^n} = a$.

Beweis. $\sqrt[n]{a^n}$ bedeutet diejenige Zahl, welche zur nten Potenz erhoben, die Zahl a^n gibt. Diese Zahl ist a.

3) Aus den Sätzen 1) und 2) folgt: Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man sie durch eine Zahl radiciert und die erhaltene Wurzel mit derselben Zahl potenziert und umgekehrt. Das Radicieren ist also die dem Potenzieren entgegengesetzte Operation. Daraus folgt, daß man durch Umkehrung der Lehrsätze über das Potenzieren zu den analogen Sätzen des Radicierens gelangt, daß man so radicieren muß, wie man potenzierte.

b) Radicierung eines Produkts.

1) Ein Produkt wird durch eine Zahl radiciert, indem man jeden Faktor durch diese Zahl radiciert und die erhaltenen Wurzeln mit einander multipliciert.

Behauptung. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ ist. Wendet man auf die letzte Potenz den Satz an, daß ein Produkt potenziert wird, indem man jeden Faktor potenziert, so erhält man $(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n$; dies ist nach Satz 1) unter a) dieses §. $= a \cdot b$, w. z. b. w.

Beispiele. $\sqrt{64} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$.
$\sqrt{64} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

2) Wurzeln von gleichen Wurzelexponenten werden mit einander multipliciert, indem man das Produkt der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiciert.

Beweis. Umkehrung von Satz 1). $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Beispiele: 1) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = \sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{64} = 8$.

2) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

3) Auf dem Lehrsatze 1) beruht die s. g. Ausscheidung eines rationalen Faktors, z. B.
$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[3]{800} = \sqrt[3]{8 \cdot 100} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{100} = 2\sqrt[3]{100}$.

4) Auf dem Satze 2) beruht das umgekehrte Verfahren, einen vor einem Wurzelausdrucke stehenden Faktor unter das Wurzelzeichen zu bringen. Es geschieht dies nämlich, indem man den Faktor zur Potenz des Wurzelexponenten erhebt und mit dieser Potenz den Radikanden multipliciert, z. B.
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$; $2\sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 100} = \sqrt[3]{800}$.

c) Radicierung eines Quotienten.

1) Ein Quotient wird durch eine Zahl radiciert, indem man sowohl den Dividendus als den Divisor durch diese Zahl radiciert und erstere Wurzel durch letztere dividiert.

Behauptung. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Beweis. Es ist hier zu beweisen, daß $(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n = a : b$ ist. Wendet man auf die Potenz $(\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b})^n$ das Gesetz an: ein Quotient wird potenziert, indem man Divisor und Dividendus potenziert,

so erhält man $(\sqrt[n]{a})^n : (\sqrt[n]{b})^n$, und dies ist nach Satz a) dieses §. gleich a : b, w. z. b. w.

Beispiele: $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$; $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$

2) Zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten werden durch einander dividiert, indem man ihre Radikanden durch einander dividiert und den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten radiciert.

Beweis. Umkehrung von Satz 1) $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a : b)}$.

Beispiel: $\sqrt[3]{16} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16 : 2} = \sqrt[3]{8} = 2$.

d) Radicierung einer Potenz.

Eine Potenz wird durch eine Zahl radiciert, indem man den Exponenten der Potenz durch diese Zahl dividiert und die Basis mit dem erhaltenen Quotienten potenziert[1]).

Behauptung. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Beweis. Hier ist zu beweisen, daß $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$ ist. Auf diese Potenz den Satz angewandt: eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, indem man ihren Exponenten mit derselben multipliciert, erhält man $a^{\frac{mn}{n}}$ und dies ist a^m.

Beispiele: 1) $\sqrt{2^6} = 2^{\frac{6}{2}} = 2^3 = 8$.

2) $\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$.

3) $\sqrt{a^6b^{12}c^{14}} = a^{\frac{6}{2}} b^{\frac{12}{2}} c^{\frac{14}{2}} = a^3b^6c^7$.

e) Potenzierung einer Wurzel.

Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Radikanden mit dieser Zahl potenziert.

1) Es wird vorerst vorausgesetzt, daß der Wurzelexponent im Potenzexponenten aufgeht.

Behauptung. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

Beweis. Dem Potenzbegriffe gemäß ist $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots$ m mal. Da gleichnamige Wurzeln mit einander multipliciert werden, indem man ihre Radikanden multipliciert, so erhält man für den letzteren Ausdruck den folgenden $\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdots \text{m mal}}$, wofür man dem Begriffe der Potenz gemäß setzen kann: $\sqrt[n]{a^m}$.

Beispiele: 1) $(\sqrt{9})^3 = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$.

2) $(\sqrt[6]{8})^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

f) Radicierung einer Wurzel.

1) Anstatt aus einer Wurzel nochmals die Wurzel zu ziehen, kann man auch den Radikanden durch das Produkt der Wurzelexponenten radicieren.

Behauptung. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Beweis. Es ist $(\sqrt[mn]{a})^{m \cdot n} = a$ nach Satz a) dieses §.

Beispiele: 1) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$.

2) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$.

3) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{8^{24}}}} - \sqrt{\sqrt{\sqrt[5]{6^{20}}}} + \sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[6]{5^{60}}}} = 7$.

2) Durch ein Produkt wird radiciert, indem man nach einander durch die Faktoren desselben in willkürlicher Reihenfolge radiciert.

Beweis. Umkehrung von 1). $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$.

Beispiel: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$ oder $=$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2.$

g) Erweiterung und Kürzung der Wurzeln.

1) Der Wert einer Wurzel bleibt unverändert, wenn man Wurzel- und Radikandexponent mit ein und derselben Zahl multipliciert und durch dieselbe Zahl dividiert.

Behauptung. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m:p]{a^{n:p}}$.

Beweis. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{np}{mp}} = a^{\frac{n:p}{m:p}}$. Der Beweis kann auch in folgender Weise geführt werden: Multipliciert man den Wurzelexponenten mit der Zahl p, so wird hiedurch der ganze Ausdruck durch p radiciert; multipliciert man nun auch den Radikandexponenten mit p, so wird hiedurch der Ausdruck mit p potenziert. Der Ausdruck ist demnach unverändert geblieben, weil man ihn mit ein und derselben Zahl radiciert und potenziert hat.

Beispiele: 1) $\sqrt{2^2} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[8]{2^8}$.

2) $\sqrt[8]{2^8} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt{2^2} = 2$.

2) Mit Hilfe des vorstehenden Lehrsatzes kann man zwei oder mehrere Wurzeln von ungleichen Wurzelexponenten in Wurzeln mit gleichen Exponenten verwandeln. Ist dies zu thun, so sucht man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Wurzelexponenten, den sogenannten gemeinschaftlichen oder General-Wurzelexponenten, und multipliciert die Potenzexponenten mit denjenigen Faktoren des gemeinschaftlichen Wurzelexponenten, welche die besondern Wurzelexponenten nicht enthalten. Beispiel:

Die folgenden Wurzeln: $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[5]{a^2}$, $\sqrt[6]{5^5}$ und $\sqrt[8]{a^7}$ sollen in andere Wurzeln von gleichem Werte verwandelt werden.

Auflösung. Da die gegebenen Wurzeln den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten 120 haben, so ist:

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3.40]{a^{2.40}} = \sqrt[120]{a^{80}}$$

$$\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4.30]{a^{3.30}} = \sqrt[120]{a^{90}}$$

$$\sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5.24]{a^{2.24}} = \sqrt[120]{a^{48}}$$

$$\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6.20]{a^{5.20}} = \sqrt[120]{a^{100}}$$

$$\sqrt[8]{a^7} = \sqrt[8.15]{a^{7.15}} = \sqrt[120]{a^{105}}.$$

II. Quadrat- und Kubikwurzel aus Polynomen.

Das hiebei einzuschlagende Verfahren stimmt mit dem bei gewöhnlichen Zahlen angewandten überein. Vor der Wurzelausziehung sind die Glieder des Polynoms zu ordnen. Beispiele:

1) $\sqrt{16x^2 - 40xy + 25y^2} = \overset{a}{4x} - \overset{b}{5y}$

$a^2 = 16x^2$

$2a = 8x \mid - 40xy + 25y^2$

$2ab + b^2 = - 40xy + 25y^2$

0.

2) $\sqrt{\frac{9}{4} + 9x - 9x^2 - 36x^3 + 36x^4} = \frac{3}{2} + 3x - 6x^2$

$\frac{9}{4}$

$3 \mid 9x - 9x^2$

$9x + 9x^2$

$2(\frac{3}{2} + 3x) \mid - 18x^2 - 36x^3 + 36x^4$

$- 18x^2 - 36x^3 + 36x^4$

0.

3) $\sqrt[3]{64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3} = \overset{a}{4x} + \overset{b}{5y}$

$a^3 = 64x^3$

$3a^2 = 48x^2 \mid 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$

0.

4) $\sqrt[3]{8x^3 + 36x^2y - 48x^2z + 54xy^2 - 144xyz + 96xz^2 + 27y^3 - 108y^2z + 144yz^2 - 64z^3} = 2x + 3y - 4z$

$$\begin{array}{l}
8x^3 \\
\hline
3a^2 = 12x^2 \mid 36x^2y - 48x^2z + 54xy^2 - 144xyz + 96xz^2 + 27y^3 \\
\qquad\qquad\quad 36x^2y \qquad\qquad + 54xy^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + 27y^3 \\
\hline
12x^2 + 36xy + 27y^2 \mid - 48x^2z - 144xyz + 96xz^2 - 108y^2z + 144yz^2 - 64z^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 48x^2z - 144xyz \qquad\qquad - 108y^2z \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 96xz^2 \qquad\qquad + 144yz^2 - 64z^3 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0.
\end{array}$$

Also heißt die Kubikwurzel $2x + 3y - 4z$.

Erklärung. Der erste Teil der Wurzel oder a ist $2x$, mithin $3a^2 = 3 \,.\, (2x)^2 = 12x^2$. Der zweite Teil der Wurzel oder b ist $3y$, mithin ist $3(a + b)^2 = 3(2x + 3y)^2 = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 12x^2 + 36xy + 27y^2$. Der dritte Teil der Wurzel oder c ist $-4z$; folglich ist $3(a + b)^2c = 3(2x + 3y)^2 \,.\, -4z = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) \,.\, -4z = -48x^2z - 144xyz - 108y^2z$. $3(a + b)c^2 = 3(2x + 3y) \,.\, (-4z)^2 = 3(2x + 3y) \,.\, 16z^2 = 96xz^2 + 144yz^2$. Endlich ist $c^3 = (-4z)^3 = -64z^3$.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung 3. Auflage, §. 23.

§. 32. Rückblick auf die Gesetze des Potenzierens und Radicierens.

1) Es ist empfehlenswert, sich an dieser Stelle noch einmal im Zusammenhange zu vergegenwärtigen, welche verschiedenen Zahlformen bisher potenziert und radiciert wurden. Was zunächst die Potenzierung betrifft, so kommen bei derselben, da sowohl die Basis als der Exponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, ein Quotient und eine Potenz sein kann, im allgemeinen 10 Fälle in betracht, die sich folgendermaßen bezeichnen lassen:

1) $(a + b)^n$	6) a^{m+n}
2) $(a - b)^n$	7) a^{m-n}
3) $(a \cdot b)^n$	8) a^{mn}
4) $(a : b)^n$	9) $a^{m:n}$
5) $(a^m)^n$	10) $a^{(m^n)}$.

2) Von diesen 10 Fällen haben ihre Erledigung wirklich gefunden: 3), 4) und 5) in §. 24, 6) in §. 22, 7) in §. 23 und 8) in §. 24. Es fehlen also noch die Lehrsätze für 1), 2), 9) und 10).

3) Die Resultate von $(a + b)^n$ und $(a - b)^n$ werden mit Hilfe des sogenannten binomischen Lehrsatzes entwickelt, der erst auf einer späteren Stufe des Unterrichts zu betrachten ist. Es sei hier besonders darauf aufmerksam gemacht, daß $(a + b)^n$ nicht etwa $a^n + b^n$ und $(a - b)^n$ nicht $a^n - b^n$ ist, ebensowenig wie man für $(a + b)^2$ den Ausdruck $a^2 + b^2$, oder für $(a - b)^2$ den Ausdruck $a^2 - b^2$ setzen darf. Umgekehrt kann auch nicht für $a^n + b^n$ etwa $(a + b)^n$, oder für $a^n - b^n$ $(a - b)^n$ gesetzt werden.

4) Der Fall 9 ist, wenn auch unter beschränkten Voraussetzungen, in §. 31 behandelt worden; denn wenn $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n}$ ist, so muß umgekehrt auch $a^{m:n} = \sqrt[n]{a^m}$ sein.

5) Fall 10) bleibt ohne Erledigung, da es keinen passenden Ausdruck gibt, der sich dafür setzen ließe.

6) Was die Radicierung betrifft, so sind hiebei, da sowohl Radikand als Wurzelexponent eine Summe, eine Differenz, ein Produkt, ein Quotient, eine Potenz und eine Wurzel sein kann, im allgemeinen 12 Fälle zu unterscheiden. Man stelle dieselben übersichtlich zusammen und gebe an, welche von denselben behandelt wurden und welche nicht.

7) Inbezug auf die 2 Fälle $\sqrt[n]{a+b}$ und $\sqrt[n]{a-b}$ sei besonders bemerkt, daß man hiefür nicht $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ bezw. $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$ setzen kann. Hiernach ist also $\sqrt{3^2 + 4^2}$ nicht $3 + 4 = 7$, sondern $\sqrt{25} = 5$, und $\sqrt{25 - 9}$ nicht $5 - 3 = 2$, sondern $\sqrt{16} = 4$.

Bemerkung. Die nachfolgenden Paragraphen behandeln das Rechnen mit irrationalen Wurzeln. Es handelt sich hiebei um die Formveränderungen, welche an irrationalen Wurzeln in den vier Grundrechnungsarten vorgenommen werden können, ohne daß der Wert derselben bestimmt wird. Was die Verschiedenheit zweier oder mehrerer Wurzeln inbezug auf Radikand und Exponent betrifft, so unterscheidet man zunächst gleiche und gleichnamige Wurzeln. Gleiche Wurzeln sind solche, die gleiche Wurzelexponenten und gleiche Radikanden haben. Gleichnamig heißen sie, wenn sie nur gleiche Wurzelexponenten besitzen. Außerdem gibt es noch Wurzeln, die gleiche Radikanden und verschiedene Exponenten haben und solche, die in beiden verschieden sind. Diese vier Fälle kommen im Nachfolgenden in betracht.

§. 33. Addition und Subtraktion von Wurzeln.

1) Nur gleiche Wurzeln können addiert oder subtrahiert werden; die Addition oder Subtraktion der drei andern Arten von Wurzeln kann man nur andeuten. Sind gleiche Wurzeln zu addieren oder zu subtrahieren, so addiert oder subtrahiert man deren Koëfficienten.

Beweis. Die Richtigkeit der vorstehenden Sätze folgt aus dem unter e) und f) des §. 10 Gesagten. Hiernach ist $4\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{7} = 6\sqrt{7}.$

Beispiele:

1) $5\sqrt[3]{a} + 8\sqrt[3]{a} + 3\sqrt[3]{a} + 13\sqrt[3]{a} = 29\sqrt[3]{a}.$

2) $17\sqrt[m]{13} + 6\sqrt[n]{7} - 15\sqrt[m]{13} - 8\sqrt[n]{7} = 2\sqrt[m]{13} - 2\sqrt[n]{7}.$

2) Läßt sich der Radikand von Wurzeln so in zwei oder mehrere Faktoren zerlegen, daß die betreffende Wurzel aus einzelnen derselben aufgeht, so kann man die letzteren radicieren und das erhaltene Resultat als Koëfficient vor das Wurzelzeichen setzen. Durch dieses Verfahren kann man häufig bei Additionen und Subtraktionen gleichnamiger Wurzeln bedeutende Abkürzungen bewirken.

Beweis folgt aus Satz b) des §. 31.

Beispiele: 1) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{96} =$

$\sqrt{4 \cdot 6} + \sqrt{9 \cdot 6} - \sqrt{16 \cdot 6} =$

$2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{6} =$

$1\sqrt{6} = \sqrt{6}$ [1].

2) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48} =$

$\sqrt{4 \cdot 3} + 2\sqrt{9 \cdot 3} + 3\sqrt{25 \cdot 3} - 9\sqrt{16 \cdot 3} =$

$2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = -13\sqrt{3}.$

3) $3\sqrt{20} + 4\sqrt{8} - 2\sqrt{45} + \sqrt{18} - 5\sqrt{80} + 6\sqrt{32} + 3\sqrt{125}$
$- \sqrt{72} + \sqrt{50}$

$= 3\sqrt{4 \cdot 5} + 4\sqrt{4 \cdot 2} - 2\sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{9 \cdot 2} - 5\sqrt{16 \cdot 5}$
$+ 6\sqrt{16 \cdot 2} + 3\sqrt{25 \cdot 5} - \sqrt{36 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2}$

$= 6\sqrt{5} + 8\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 20\sqrt{5} + 24\sqrt{2} + 15\sqrt{5}$
$- 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$

$= -5\sqrt{5} + 34\sqrt{2}$

$= 34\sqrt{2} - 5\sqrt{5}.$

4) $\sqrt{12c^3} + \sqrt{27c^3} - \sqrt{48c^3}$

$= \sqrt{4c^2 \cdot 3c} + \sqrt{9c^2 \cdot 3c} - \sqrt{16c^2 \cdot 3c}$

$= 2c\sqrt{3c} + 3c\sqrt{3c} - 4c\sqrt{3c}$

$= c\sqrt{3c}.$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 24.

---

1) Hier ist dem Schüler besonders zu zeigen, welche bedeutende Abkürzung durch dieses Verfahren erreicht wird. Würde man ohne dasselbe rechnen, so müßte man dreimal radicieren, während man mit Anwendung desselben nur einmal die Wurzel auszuziehen hat. („Man muß durch Überlegung Rechnen zu sparen suchen“).

§. 34. Multiplikation irrationaler Wurzeln.

1) Haben die zu multiplicierenden Wurzeln gleiche Wurzelexponenten, so multipliciert man die Radikanden mit einander und gibt dem Produkte derselben das gemeinschaftliche Wurzelzeichen.

Beweis. Satz b) des §. 31.

Beispiele: 1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{35}$.

2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

2) Haben die zu multiplicierenden Wurzeln verschiedene Exponenten, so bringt man sie auf Wurzeln mit gleichen Exponenten. Man vergleiche Satz g) in §. 31

Beispiele: 1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

$$= \sqrt[6]{2^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}$$

$$= \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$= \sqrt[6]{4 \cdot 27}$$

$$= \sqrt[6]{108}.$$

2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[4]{c} \cdot \sqrt[5]{d} \cdot \sqrt[6]{e} \cdot \sqrt[10]{f}$

$$= \sqrt[60]{a^{30}} \cdot \sqrt[60]{b^{20}} \cdot \sqrt[60]{c^{15}} \cdot \sqrt[60]{d^{12}} \cdot \sqrt[60]{e^{10}} \cdot \sqrt[60]{f^6}$$

$$= \sqrt[60]{a^{30}b^{20}c^{15}d^{12}e^{10}f^6}.$$

3) Die Multiplikation eines Polynoms, dessen Glieder Wurzeln sind, mit einem Monome oder einem Polynome geschieht nach Gesetz f) und g) des §. 12 unter Beachtung der vorstehenden Regeln.

Beispiele:

1) $(8\sqrt{12} + 2)(6\sqrt{12} + 7) =$

$$48 \cdot 12 + 12\sqrt{12}$$
$$+ 56\sqrt{12} + 14$$

$$576 + 68\sqrt{12} + 14 =$$
$$590 + 68\sqrt{12} =$$
$$590 + 136\sqrt{3}.$$

$8\sqrt{12} \cdot 6\sqrt{12} =$
$8 \cdot 6\sqrt{12 \cdot 12} =$
$8 \cdot 6\sqrt{144} =$
$8 \cdot 6 \cdot 12$

$$2)\ \sqrt[3]{\sqrt{31}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{31}+2}+\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}=$$

$$\sqrt[3]{31-4}+\sqrt[3]{81-17}=$$

$$\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}=$$

$$3+4=$$

$$7.$$

4) Ein vor einer Wurzel stehender Koëfficient kann als Faktor unter das Wurzelzeichen gebracht werden, wenn man ihn vorher auf den Grad des Wurzelexponenten potenziert.

Beweis. Satz b des §. 31.

Beispiele: 1) $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2\cdot 6}=\sqrt{4\cdot 6}=\sqrt{24}.$

2) $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}.$

$$3)\ \frac{a-x}{a+x}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{(a-x)^2(a+x)}{(a+x)^2\cdot(a-x)}}=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 25.

§. 35. Division irrationaler Wurzeln.

1) Haben die Wurzeln, welche durch einander dividiert werden sollen, den gleichen Wurzelexponenten, so dividiert man die Radikanden durch einander und radiciert den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Wurzelexponenten.

Beweis ist in Satz c) des §. 31 enthalten.

Beispiele:

$$1)\ \sqrt[3]{15}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{15:5}=\sqrt[3]{3}.$$

$$2)\ \sqrt[8]{\frac{m^{15}n^2p^4}{q^7r^4}}:\sqrt[8]{\frac{m^7p^4q}{n^6r^4}}=\sqrt[8]{\frac{m^{15}n^2p^4}{q^7r^4}:\frac{m^7p^4q}{n^6r^4}}$$

$$=\sqrt[8]{\frac{m^{15}n^2p^4}{q^7r^4}\cdot\frac{n^6r^4}{m^7p^4q}}=\sqrt[8]{\frac{m^8n^8}{q^8}}=\frac{mn}{q}.$$

2) Haben die Wurzeln, welche durch einander dividiert werden sollen, verschiedene Wurzelexponenten,

so verwandelt man sie in Wurzeln mit gleichen Exponenten und verfährt dann nach 1).

Beweis. Vergleiche Satz g) des §. 31.

Beispiele:

$$1)\ \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{5^2}{5^3}} = \sqrt[6]{\frac{1}{5}}.$$

$$2)\ \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{16}{27}}.$$

$$3)\ \sqrt[3]{x^2yz} : \sqrt[5]{xy^2z^3} = \frac{\sqrt[15]{(x^2yz)^5}}{\sqrt[15]{(xy^2z^3)^3}} = \frac{\sqrt[15]{x^{10}y^5z^5}}{\sqrt[15]{x^3y^6z^9}} =$$

$$\sqrt[15]{\frac{x^{10}y^5z^5}{x^3y^6z^9}} = \sqrt[15]{\frac{x^7}{yz^4}}.$$

$$4)\ \sqrt{x^2 - y^2} : (x - y) = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{(x - y)^2}} = \sqrt{\frac{(x + y)(x - y)}{(x - y)(x - y)}}$$

$$= \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}.$$

3) Sind algebraische Summen, deren Glieder irrationale Wurzeln sind, zu dividieren, so wird die Division nach den für die algebraischen Summen entwickelten Gesetzen unter Beachtung vorstehender Regeln ausgeführt.

4) Sollen irrationale Wurzeln durch einander dividiert werden, so pflegt man gewöhnlich den Dividendus und den Divisor mit einem solchen Wurzelausdrucke zu multiplicieren, daß hiedurch das Wurzelzeichen im Nenner verschwindet. Man nennt dieses Verfahren das Rationalmachen des Nenners [1]. Hiebei sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

---

1) Der Nutzen dieses Rationalmachens für das praktische Rechnen läßt sich den Schülern leicht an einem Beispiele zeigen. Soll z. B. $\frac{3}{\sqrt{2}}$ gesucht werden, so müßte man rechnen: $\frac{3}{1,414} = 2,1216$, was jedenfalls viel umständlicher ist als $\frac{3\sqrt{2}}{2} = 1,5 \,.\, 1,414$. (Man multipliciert leichter mit einer mehrstelligen Zahl als man durch dieselbe dividiert.

a) Ist der Divisor eine monomische Quadratwurzel, so multipliciert man Divisor und Dividendus mit der im Divisor stehenden Wurzel. Beispiel:

$$\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{(3\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}+3}{3} = \sqrt{6}+1.$$

b) Wenn der Nenner die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln ist, so macht man ihn nach der Formel $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ rational. Ist also der Nenner eine Summe, so muß man Zähler und Nenner mit der Differenz der Summanden multiplicieren, und mit der Summe derselben, wenn der Nenner eine Differenz ist. Beispiele:

$$1)\ \frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})} = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{2}).$$

$$2)\ \frac{1+2\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \frac{(1+2\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \frac{5+\sqrt{3}+10\sqrt{3}+6}{25-3} = \frac{11+11\sqrt{3}}{22} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

c) Bei drei- oder viergliedrigem Divisor muß man derartige Multiplikationen wiederholen.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 26.

§. 36. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

a) Bedeutung einer Potenz mit gebrochenem Exponenten.

In den früheren Sätzen der Potenzlehre (II. Abschnitt) kamen nur Potenzen in betracht, deren Exponenten ganze Zahlen waren. Sollen jene Sätze nun auch auf Potenzen mit gebrochenen Exponenten ausgedehnt werden, so muß man den Potenzbegriff vorerst erweitern. Nach Satz d) des §. 31 entsteht eine Potenz mit gebrochenem Exponenten, wenn eine Potenz radiciert wird, wobei der Wurzelexponent kein Faktor des Potenzexponenten ist. Demgemäß

drückt eine Potenz mit gebrochenem Exponenten aus, daß man zuerst die Basis derselben mit dem Zähler des Bruchexponenten potenzieren und diese Potenz durch den Nenner radicieren soll, oder mit anderen Worten: eine solche Potenz drückt eine Wurzel vom Grade des Nenners aus einer Potenz vom Grade des Zählers des Exponenten aus, also:

$$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2};\ a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

b) Das Rechnen mit Bruchpotenzen.

Alle bisher für das Rechnen mit Potenzen entwickelten Gesetze haben auch volle Gültigkeit für Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Beweis. Der Beweis des vorstehenden Satzes besteht darin, daß man den gebrochenen Potenzen die Wurzelform gibt, darauf die Formeln der Wurzelrechnung anwendet und die erhaltenen Ausdrücke auf die Potenzform zurückführt; z. B.:

$$1)\ (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}.$$

$$2)\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

$$3)\ a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

Ähnlich sind die übrigen Beweise.

Beispiele:

$$1)\ a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = a^{\frac{15+10-4}{20}} = a^{\frac{21}{20}} =$$
$$\sqrt[20]{a^{21}} = a\sqrt[20]{a}.$$

$$2)\ \frac{a}{b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{5}{4}} b}{c^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{9}{4}} b}{b^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}} = \frac{a^{\frac{9}{4}} b^{\frac{1}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}}.$$

$$3)\ (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{7}{6}} - a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{7}{6}} =$$
$$a\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{a^4 b^3} + \sqrt[6]{a^3 b^4} - b\sqrt[6]{b}.$$

$$4)\ 10a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{2}{3}} : 2a^{-\frac{3}{2}} b = 5a^3 b^{-\frac{1}{3}}.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl., §. 27.

§. 37. Die imaginären Zahlen.

a) Begriff der imaginären Zahlen.

$\sqrt{25} = \pm 5$; denn sowohl $(+5)^2$, als $(-5)^2$ gibt 25. Aus -25 dagegen kann die Quadratwurzel weder $(+5)$, noch (-5) sein, da keiner dieser Werte, zweimal als Faktor gesetzt, -25 gibt. $\sqrt[3]{-27} = -3$; denn $(-3)^3 = -27$. Die 4. Wurzel aus -81 ist weder $(+3)$, noch (-3), weil $(\pm 3)^4 = 81$ gibt. $\sqrt[5]{-32} = -2$; denn $(-2)^5 = -32$. $\sqrt[6]{-64} = ?$ Aus diesen Beispielen folgern wir:

Jede gerade Wurzel einer negativen Zahl ist weder positiv noch negativ; sie kann daher nicht ausgezogen, sondern nur angedeutet werden. Aus diesem Grunde nennt man jeden Wurzelausdruck, dessen Radikand negativ und dessen Wurzelexponent gerade ist, eine imaginäre[1]) Zahl. Die Ausdrücke $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-7}$ sind also imaginäre Zahlen. Im Gegensatze zu ihnen nennt man die ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen, sowohl positive als negative, reélle oder wirkliche Zahlen.

$\sqrt[2n]{-a}$ ist die allgemeine Form eines imaginären Ausdrucks und $\sqrt{-1}$, gewöhnlich durch i bezeichnet, die imaginäre Einheit. Ein Binom von der Form $a + ib$, worin a und b reelle Zahlen sind, i die imaginäre Einheit, heißt eine komplexe Zahl.

b) Die wichtigsten Sätze über das Rechnen mit imaginären Ausdrücken.

1) Jede Quadratwurzel aus einer negativen Zahl läßt sich als das Produkt einer reellen Zahl und der imaginären Einheit ausdrücken; z. B. $\sqrt{-16} = \sqrt{16 \cdot (-1)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = \pm 4 \cdot i$, oder $\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1} = \pm \sqrt{a} \cdot i$.

2) Das Quadrat einer imaginären Quadratwurzel ist der negative Radikand.

Beweis folgt aus dem Begriffe der Wurzel; also $(\sqrt{-1})^2 = -1$, $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

1) Imaginär (spr. imaschinähr, fr. imaginaire), eingebildet, unmöglich; vom lat. imāgo (inis), Bild, Schein.

3) Das Produkt aus einer reellen und imaginären Quadratwurzel ist imaginär.

Beweis. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{-ab}.$

4) Das Produkt zweier imaginärer Quadratwurzeln ist reell, aber negativ.

Beweis. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot (\sqrt{-1})^2 = \sqrt{ab} \cdot -1 = -\sqrt{ab}.$

5) Der Quotient aus einer reellen und imaginären Quadratwurzel ist imaginär.

Beweis. $\sqrt{a} : \sqrt{-b} = \sqrt{a} : i\sqrt{b} = i\sqrt{a : b}.$

6) Der Quotient aus zwei imaginären Quadratwurzeln ist reell.

Beweis. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = i\sqrt{a} : i\sqrt{b} = \sqrt{a : b}.$

Rückblick auf die Verschiedenheit der Zahlen.

Der Begriff *Zahl* erfährt, wie wir bisher wahrgenommen haben, in der Mathematik eine fortschreitende Entwicklung. Die Reihe der *natürlichen* oder *absoluten* (positiven) *ganzen* Zahlen wurde zunächst durch die Reihe der *negativen* Zahlen, zu welchen die Subtraktion führte, erweitert. Bei der Division gelangten wir sodann zum Begriffe der *gebrochenen* Zahlen. Aus dem Wurzelausziehen endlich entwickelten sich die Begriffe der *irrationalen*, *imaginären* und *komplexen* Zahlen. Das folgende Schema bringt diese Einteilung zur Übersicht:

\+ Zahlen —

Reelle Z. — Imaginäre Z. — Komplexe Z.

Reelle Z.: Rationale Z. — Irrationale Z.

Rationale Z.: Ganze Z. — Gebr. Z.

Vierter Abschnitt.

Vermischte Reduktionen.

§. 38. Der Begriff: Reduktion.

Unter dem Worte Reduktion versteht man in der Buchstabenrechnung die Zurückführung eines algebraischen Ausdrucks auf die einfachste oder kürzeste Form, deren er fähig ist. Um solche Reduktionen auszuführen, hat man entweder Brüche zu addieren, also Polynome in Monome zu verwandeln, oder algebraische Summen in Faktoren zu zerlegen und, falls dieselben in Bruchform auftreten, zu kürzen. Von beiden Mitteln der Reduktion war schon in §. 14, 16 und 17 die Rede. Hier soll noch an einigen, und zwar schwierigeren, Beispielen gezeigt werden, wie man, je nach der Beschaffenheit des zu reducierenden Ausdrucks, bald das eine, bald das andere der verschiedenen Reduktionsmittel anzuwenden hat, um die kürzeste Form desselben zu erhalten. Allgemeine Regeln lassen sich hierüber nicht geben. Sicherheit und Gewandtheit im Auflösen solcher Aufgaben läßt sich nur durch vielseitige Übung erreichen.

§. 39. Ausdrücke ohne Wurzelgrößen.

Bei vermischten Reduktionen dieser Art von Ausdrücken kommt es namentlich vor, daß die Faktoren eines Produkts, oder Zähler und Nenner eines Bruches oder die Summanden einer algebraischen Summe selbst wieder zusammengesetzte Ausdrücke sind. Ist dies der Fall, so muß man dieselben zunächst auf den Generalnenner bringen und ihnen dann mit Hilfe der bis jetzt entwickelten Regeln die einfachste Form geben. Beispiele:

1) $$\frac{4x^2 - 9y^2}{3zt} \cdot \frac{5z}{2x - 3y} + \frac{2x - 3y}{2z + 3t} : \frac{4x^2 - 9y^2}{4z^2 - 9t^2}$$

$$= \frac{(2x - 3y)(2x + 3y)5z}{(2x - 3y)3zt} + \frac{2x - 3y}{2z + 3t} \cdot \frac{(2z - 3t)(2z + 3t)}{(2x - 3y)(2x + 3y)}$$

$$= \frac{10x + 15y}{3t} + \frac{2z - 3t}{2x + 3y}$$

$$= \frac{(10x + 15y)(2x + 3y) + (2z - 3t)3t}{(2x + 3y)3t}$$

$$= \frac{20x^2 + 60xy + 45y^2 + 6zt - 9t^2}{6xt + 9yt}.$$

2) $\left(\frac{3}{x + y} - \frac{2}{x - y}\right) : \left(\frac{3}{x - y} - \frac{2}{x + y}\right)$

$$= \frac{3x - 3y - 2x - 2y}{(x + y)(x - y)} : \frac{3x + 3y - 2x + 2y}{(x - y)(x + y)}$$

$$= \frac{x - 5y}{x^2 - y^2} : \frac{x + 5y}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{x - 5y}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x^2 - y^2}{x + 5y}$$

$$= \frac{x - 5y}{x + 5y}.$$

3) $\left[\frac{3x^2 + 4yz}{8x^2} - \frac{2z + 7y}{12z} + \frac{35x^2y - 24yz^2}{48x^2z}\right] \cdot \left[3 - \frac{5y}{6z}\right] : \frac{180z^2 + 76yz - 35y^2}{96y}$

$$= \frac{18x^2z + 24yz^2 - 8x^2z - 28x^2y + 35x^2y - 24yz^2}{48x^2z} \cdot \frac{18z - 5y}{6z} \cdot \frac{96y}{(18z - 5y)(10z + 7y)}$$

$$= \frac{10x^2z + 7x^2y}{48x^2z} \cdot \frac{18z - 5y}{6z} \cdot \frac{96y}{(18z - 5y)(10z + 7y)}$$

$$= \frac{x^2(10z + 7y)}{48x^2z} \cdot \frac{18z - 5y}{6z} \cdot \frac{96y}{(18z - 5y)(10z + 7y)}$$

$$= \frac{y}{3z^2}.$$

4) $\frac{15x^3 + 9x^2y}{4c^3 - 20cd^2x^3} : \left[\frac{25dx^2 - 9dy^2}{24c^2x} : \left(\frac{24c^4 - 600d^4x^6}{9x^4} : \frac{48c^2 + 240d^2x^3}{5x^2 - 3xy}\right)\right].$

Lösung a). Man kann mit der Auflösung der innersten Klammer beginnen; alsdann erhält man:

$$\frac{15x^3 + 9x^2y}{4c^3 - 20cd^2x^3} : \left[\frac{25dx^2 - 9dy^2}{24c^2x} : \frac{24(c^2+5d^2x^3)(c^2-5d^2x^3)(5x-3y)x}{9x^4(c^2+5d^2x^3)48}\right]$$

$$= \frac{15x^3 + 9x^2y}{4c^3 - 20cd^2x^3} : \left[\frac{25dx^2 - 9dy^2}{24c^2x} : \frac{(c^2 - 5d^2x^3)(5x - 3y)}{18x^3}\right]$$

$$= \frac{15x^3 + 9x^2y}{4c^3 - 20cd^2x^3} : \frac{d(5x + 3y)(5x - 3y) \cdot 18x^3}{24c^2x(c^2 - 5d^2x^3)(5x - 3y)}$$

$$= \frac{15x^3 + 9x^2y}{4c^3 - 20cd^2x^3} : \frac{3dx^2(5x + 3y)}{4c^2(c^2 - 5d^2x^3)}$$

$$= \frac{3x^2(5x + 3y)}{4c(c^2 - 5d^2x^3)} \cdot \frac{4c^2(c^2 - 5d^2x^3)}{3dx^2(5x + 3y)}$$

$$= \frac{c}{d}.$$

Lösung b). Man kann auch, und dies Verfahren führt rascher zum Ziele, zunächst vor der Vereinigung der einzelnen Ausdrücke die Klammern auflösen, wobei folgende Regel zu beachten ist: Steht ein $\times$ vor der Klammer, so bleiben die Verbindungszeichen der einzelnen Glieder derselben Klammer unverändert; steht ein : vor der Klammer, so werden sämtliche Vorzeichen der Glieder derselben Klammer umgekehrt, $\times$ in : und : in $\times$. Auf diese Weise erhält man schließlich lauter Multiplikationen. Dieselben findet man auch dadurch, daß man nach der Zahl der : überlegt, wievielmal der reciproke Wert eines Ausdrucks zu nehmen ist und den Ausdruck hiernach entweder stehen läßt oder umkehrt. Unter Beachtung des Gesagten geht der gegebene Ausdruck über in:

$$\frac{3x^2(5x+3y)}{4c(c^2-5d^2x^3)} \cdot \frac{24c^2x}{d(5x+3y)(5x-3y)} \cdot \frac{24(c^2+5d^2x^3)(c^2-5d^2x^3)}{9x^4} \cdot$$

$$\frac{x(5x-3y)}{48(c^2+5d^2x^3)} = \frac{c}{d}.$$

5) $$\left[\frac{16\frac{1}{3}x^2-3}{2\frac{1}{3}x+1} + \frac{2-6\frac{3}{4}x^3}{1+1\frac{1}{2}x+2\frac{1}{4}x^2} - \frac{0{,}07-1\frac{2}{7}x^2}{0{,}1+\frac{3}{7}x} + \frac{3\frac{1}{2}a^2-3\frac{1}{2}x^2}{5a^2-5x^2}\right] :$$

$$\left[\frac{7x^2}{5} - \frac{1}{35}\right]$$

$$= \left[\frac{\frac{49x^2 - 9}{3}}{\frac{7x + 3}{3}} + \frac{\frac{8 - 27x^3}{4}}{\frac{4 + 6x + 9x^2}{4}} - \frac{\frac{49 - 900x^2}{700}}{\frac{7 + 30x}{70}} + \frac{\frac{7a^2 - 7x^2}{2}}{5a^2 - 5x^2}\right] : \frac{49x^2 - 1}{35}$$

$$= \left[\frac{(7x+3)(7x-3)\cdot 3}{(7x+3)\cdot 3} + \frac{(2-3x)(4+6x+9x^2)\cdot 4}{(4+6x+9x^2)\cdot 4}\right.$$

$$\left. - \frac{(7+30x)(7-30x)\cdot 70}{(7+30x)\cdot 700} + \frac{7(a^2-x^2)}{2\cdot 5(a^2-x^2)}\right] \cdot \frac{35}{(7x+1)(7x-1)}$$

$$= \left(7x - 3 + 2 - 3x - \frac{7-30x}{10} + \frac{7}{10}\right) \cdot \frac{35}{(7x+1)(7x-1)}$$

$$= (7x - 1) \cdot \frac{35}{(7x+1)(7x-1)}$$

$$= \frac{35}{7x + 1}.$$

§. 40. Ausdrücke mit Wurzelgrößen.

Bei Ausdrücken dieser Art sind außer den in §. 39 benützten Reduktionsregeln auch die Gesetze über die Umformung irrationaler Wurzeln in Anwendung zu bringen. Beispiele:

$$1)\ \sqrt[3]{\frac{(16a^2 - 4b^2)(4a + 2b)^2}{4a - 2b}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(4a + 2b)(4a - 2b)(4a + 2b)(4a + 2b)}{4a - 2b}}$$

$$= \sqrt[3]{(4a + 2b)(4a + 2b)(4a + 2b)}$$

$$= \sqrt[3]{(4a + 2b)^3}$$

$$= 4a + 2b.$$

$$2)\ \sqrt[3]{24x^{m+6}y^9} - \sqrt[3]{81x^{m+12}y^{15}} + \sqrt[3]{192x^{m-18}y^{24}}$$

$$= \sqrt[3]{8x^6y^9 \cdot 3x^m} - \sqrt[3]{27x^{12}y^{15} \cdot 3x^m} + \sqrt[3]{64x^{-18}y^{24} \cdot 3x^m}$$

$$= 2x^2y^3\sqrt[3]{3x^m} - 3x^4\sqrt[3]{3x^m} + 4x^{-6}y^8\sqrt[3]{3x^m}$$

$$= (2x^2y^3 - 3x^4 + 4x^{-6}y^8)\sqrt[3]{3x^m}.$$

3) $\left[\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}-\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right]\left[\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}\right]$

$$= \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}$$

$$= \frac{(x-y)(x-y)-(x+y)(x+y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x^2-2xy+y^2-x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{-4xy}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4xy}{y^2-x^2}.$$

Erläuterung. Multipliciert man die Summe und Differenz zweier Zahlen mit einander, so erhält man die Differenz ihrer Quadrate, u. s. w.

4) $(x+3a)\sqrt{49x^4+147ax^3+441a^2x^2}-7\sqrt{72a^3x^3}$
$-7x\sqrt{(x^3-27a^3)(x-3a)}$
$= (x+3a)\sqrt{49x^2(x^2+3ax+9a^2)}-7\sqrt{36a^2x^2\cdot 2ax}$
$-7x\sqrt{(x-3a)(x^2+3ax+9a^2)(x-3a)}$
$= (x+3a)7x\sqrt{x^2+3ax+9a^2}-42ax\sqrt{2ax}$
$-7x(x-3a)\sqrt{x^2+3ax+9a^2}$
$= \sqrt{x^2+3ax+9a^2}\,((x+3a)7x-7x(x-3a))$
$-42ax\sqrt{2ax}$
$= \sqrt{x^2+3ax+9a^2}\,(7x^2+21ax-7x^2+21ax)$
$-42ax\sqrt{2ax}$
$= \sqrt{x^2+3ax+9a^2}\cdot 42ax-42ax\sqrt{2ax}$
$= 42ax(\sqrt{x^2+3ax+9a^2}-\sqrt{2ax}).$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 29 und §. 30.

Fünfter Abschnitt.

Von den Gleichungen.

§. 41. Von den Gleichungen im allgemeinen.

a) Der Begriff Gleichung.

Nach §. 4 ist eine Gleichung die Verbindung zweier gleichwertiger Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen. Die Ausdrücke links und rechts vom Gleichheitszeichen heißen die Seiten der Gleichung, und zwar nach ihrer Stellung linke und rechte Seite. Die Teile jeder Seite, welche durch die Zeichen + oder — getrennt sind, nennt man Glieder. Gleichungen sind die folgenden Ausdrücke: $10 = 6 + 4$, oder $b = 10b - 9b$, oder $3x = 12$, wofern man im letzten Ausdrucke dem Buchstaben x den Wert 4 beilegt.

b) Verschiedenheit der Gleichungen.

1) Die Gleichungen zerfallen in identische und in algebraische Gleichungen.

2) Jede Gleichung, worin ein Zahlenausdruck sich selbst oder einer bloßen Umformung desselben gleichgesetzt wird, heißt eine identische Gleichung, und zwar eine identische[1]) Gleichung im engern Sinne, wenn das erstere, und eine analytische[2]) Gleichung, wenn das letztere der Fall ist. So ist z. B. $a - 2b + c = a - 2b + c$ eine identische Gleichung im engern Sinne, dagegen $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, oder $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ eine analytische Gleichung. Alle bisher entwickelten Formeln sind analytische Gleichungen. Die Gleichheit der Seiten analytischer Gleichungen ist von den spe-

---

1) Identisch (fr. identique), ebendasselbe, ein und dasselbe, gleich; v. lat. idem, dasselbe. Identität (lat. identitas), „die Übereinstimmung an Größe und Form". 2) Analytisch, auflösend, zerlegend, zergliedernd; von dem Worte Analysis oder Analyse (v. gr. analýein, auflösen), Auflösung, Zergliederung. Die genannten Gleichungen heißen analytisch, weil man durch Auflösung der einen Seite die Identität der Gleichung erkennt.

ziellen Zahlenwerten der darin vorkommenden Buchstaben unabhängig. So bleibt z. B. der Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eine Gleichung, man mag für a und b Zahlenwerte einsetzen, welche man will.

3) Gleichungen, deren Seiten nur dann einander gleich sind, wenn einem oder mehreren Buchstaben derselben bestimmte Werte beigelegt werden, nennt man Bestimmungsgleichungen (auch synthetische [1]), algebraische Gleichungen, oder kurz Gleichungen). So ist z. B. der Ausdruck $a + 5 = 17 - a$ eine solche Gleichung, denn die beiden Seiten sind nur unter der Bedingung einander gleich, daß $a = 6$ ist. Bestimmungsgleichungen dienen dazu, um aus bekannten Größen unbekannte zu ermitteln. Die letzteren nennt man die Unbekannten. Man pflegt die unbekannten Zahlen einer Gleichung durch die letzten, die bekannten durch Ziffern oder die ersten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets zu bezeichnen. Obige Bestimmungsgleichung wird daher so bezeichnet: $x + 5 = 17 - x$. Eine Gleichung auflösen heißt, dieselbe so umformen, daß auf der einen Seite des Gleichheitszeichens nur x, auf der andern ein Ausdruck steht, der nur aus bekannten Zahlen zusammengesetzt ist. Den Wert der Unbekannten, der einer Gleichung genügt, nennt man auch die Wurzel der Gleichung. Durch Einsetzung der Wurzel für die Unbekannte wird die Gleichung zu einer identischen. Derjenige Teil der allgemeinen Arithmetik, der sich mit der Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für Rechenaufgaben und mit der Auflösung dieser Gleichungen befaßt, heißt Algĕbra [2]).

---

1) Synthĕtisch, zusammensetzend, verbindend; v. dem Worte Synthĕsis oder Synthēse, Zusammensetzung, Verknüpfung. 2) Von dem arab. Worte al-dschebr oder al-gebr, eig. Verbindung getrennter Teile. Die Anwendung von Gleichungen war schon im Altertume bekannt, namentlich lehrte sie Diophantos. Hier ist es am Platze, die Schüler auf die hohe Bedeutung der Gleichungen hinzuweisen. Sie bilden das Fundament alles mathematischen Denkens. Durch Gleichungen werden die in der Natur sich offenbarenden Gesetze ausgedrückt und selbst im gewöhnlichen Geschäftsleben werden die Beziehungen zwischen Größen jeder Art durch Gleichungen fixiert. Daraus folgt, daß es notwendig ist, sich eine gründliche Kenntnis der Lehre von den Gleichungen und Gewandtheit im Auflösen derselben anzueignen.

4) Je nachdem der höchste Exponent der Unbekannten einer Gleichung 1, 2, 3, 4 u. s. w. ist, unterscheidet man Gleichungen des ersten, zweiten, dritten, vierten u. s. w. Grades. Die Gleichungen des zweiten Grades nennt man auch quadratische, die des dritten Grades kubische und die des vierten Grades biquadratische Gleichungen. Um über den Grad einer Gleichung urteilen zu können, muß man sie erst ordnen (man vergleiche e). Die Gleichung $ax = p$ ist eine Gleichung des ersten Grades, der Ausdruck $ax^2 + bx = p$ ist eine quadratische Gleichung und die Gleichung $ax^3 + bx^2 + cx = p$ ist eine kubische Gleichung.

5) Nach der Anzahl der in einer Gleichung vorkommenden Unbekannten unterscheidet man Gleichungen mit einer, zwei oder mehr Unbekannten. Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte als Wurzelausdruck oder mit gebrochenem Exponent erscheint, wird irrational genannt, im andern Falle rational. Eine numerische oder Zahlengleichung ist eine solche, in der sowohl die Koëfficienten der Unbekannten als auch alle anderen Glieder reine Zahlen sind. Sind sie dagegen allgemeine Zahlen, so nennt man eine solche Gleichung eine Buchstabengleichung. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte nur in einer Potenz vor, so heißt sie eine reine, im andern Falle eine gemischte oder unreine Gleichung. So ist z. B. $x^2 = m$ eine reine, dagegen $x^2 + bx = m$ eine gemischte quadratische Gleichung.

c) Grundsatz, auf dem die Auflösung der Gleichungen beruht.

Die Auflösung der Gleichungen läßt sich auf den in §. 8, 5 angeführten Grundsatz: Gleiches auf gleiche Weise verändert bleibt gleich, zurückführen. Derselbe läßt sich mit Beziehung auf die Auflösung der Gleichungen also aussprechen:

Eine Gleichung bleibt unverändert richtig, wenn man beide Seiten um gleich viel vermehrt oder vermindert, mit einer und derselben Zahl multipliciert, durch eine und dieselbe Zahl dividiert, mit einer und derselben Zahl potenziert und durch eine und dieselbe Zahl radiciert. Man pflegt diese Sätze in den einen Satz zusammenzufassen: Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man an beiden Seiten dieselbe Rechnungsoperation ausführt.

d) Sätze über die Umformung der Gleichungen.

Aus den unter c) angeführten Sätzen ergeben sich die nachstehenden Folgerungen:

1) Gleiche Glieder, welche auf verschiedenen Seiten mit demselben Vorzeichen stehen, können weggelassen werden.

Angenommen, es sei die Gleichung: $5x - 9 + 4 = 6x - 9$ gegeben, in welcher zwei gleiche Glieder mit demselben Vorzeichen auf beiden Seiten stehen. Obigem Grundsatze gemäß muß diese Gleichung richtig bleiben, wenn man diese 2 gleichen Glieder auf beiden Seiten wegläßt, also statt $5x - 9 + 4 = 6x - 9$ schreibt: $5x + 4 = 6x$; denn das Weglassen dieser beiden Glieder -9 von beiden Seiten ist eine Addition der Zahl $+9$ zu beiden Seiten; nämlich: $(5x - 9 + 4) + 9 = (6x - 9) + 9$, was $5x + 4 = 6x$ ergibt.

2) Man kann Glieder beliebig von der einen Seite einer Gleichung auf die andere bringen, wenn man deren Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandelt. Diese Operation nennt man das Transponieren[1]) oder die Transposition der Glieder. Es wird in der Regel so transponiert, daß die mit den Unbekannten versehenen Glieder (die unbekannten Glieder) auf die linke Seite, die bekannten auf die rechte Seite zu stehen kommen. Eine Gleichung ist „auf Null gebracht“ (reduciert), wenn alle Glieder derselben auf einer Seite stehen, also: $5x - 4x - 3 - 1 = 0$ (Normalform).

Es sei die Gleichung: $5x - 3 = 4x + 1$ vorgelegt. Bedenkt man, daß man die Zahl $+3$ zur linken Seite addiert und sie mithin um so viel vergrößert, wenn man das Glied -3 von derselben wegläßt, diese gestörte Gleichheit zwischen beiden Seiten aber dadurch wieder hergestellt werden kann, daß man gleichzeitig, indem man das Glied -3 von der linken Seite wegläßt, die Zahl $+3$ zur rechten Seite addiert, so leuchtet ein, daß man statt $5x - 3 = 4x + 1$, auch $5x = 4x + 1 + 3$ schreiben kann. Läßt man das Glied $+1$ von der rechten Seite weg, so subtrahiert man damit die Zahl $+1$ von dieser Seite. Subtrahiert man nun auch von der linken Seite gleichzeitig die Zahl 1, so wird offenbar die Gleichheit beider Seiten nicht

1) Transponieren, lat. transpōnĕre (v. trans, jenseits und ponĕre, setzen), versetzen, übersetzen (auch in der Tonkunst). Transposition, Versetzung.

vernichtet. Man kann also schreiben: $5x - 3 - 1 = 4x$ statt: $5x - 3 = 4x + 1$. Endlich kann man auch $5x - 4x = 1 + 3$ statt $5x - 3 = 4x + 1$ setzen, welche Umformung ebenso wie die vorigen auf obigem Grundsatze beruht.

3) **Man darf die Vorzeichen sämtlicher Glieder einer Gleichung in die entgegengesetzten verwandeln.**

Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich, wenn man beide Seiten transponiert, oder dieselben mit -1 multipliciert.

4) **Jedes Glied einer Gleichung kann von seinem Koëfficienten befreit werden, wenn man die ganze Gleichung durch denselben dividiert.**

Angenommen, die Gleichung $5x = 20$ sei gegeben. Läßt man den Koëfficienten von x, nämlich 5, von der linken Seite weg, so wird hiedurch diese Seite durch 5 dividiert. Um die Gleichheit beider Seiten nicht zu verletzen, muß auch die rechte Seite durch 5 dividiert werden; auf diese Weise erhält man: $x = 20 : 5 = 4$, statt $5x = 20$.

5) **Brüche, die in einer Gleichung vorkommen, können dadurch beseitigt werden, daß man die ganze Gleichung mit dem Generalnenner dieser Brüche multipliciert.**

Es sei $\frac{19 - x}{2} - \frac{39 - x}{3} = -4$ die von den Brüchen zu befreiende Gleichung. Multipliciert man dieselbe mit dem Generalnenner ihrer Brüche, nämlich mit 6, so folgt:

$$\frac{(19 - x)6}{2} - \frac{(39 - x)6}{3} = -4 \cdot 6.$$

Oder: $(19 - x)3 - (39 - x)2 = -24$

„ $57 - 3x - 78 + 2x = -24$

„ $-x = -3$

„ $x = 3.$

Aus dem Vorstehenden ist ersichtlich, daß man die Glieder einer Gleichung am schnellsten von ihren Nennern befreit, **indem man mit denselben in den Generalnenner dividiert und den Quotienten mit dem Zähler des betreffenden Gliedes multipliciert.**

Man **denkt und spricht hierbei** etwa so: Der Generalnenner ist 6; der Nenner 2 liegt im Hauptnenner 3 mal; mithin muß der Zähler mit 3 multi-

pliciert werden; das gibt 57 — 3x, u. s. w. — Für den Anfang empfiehlt es sich, die Glieder gleichnamig machen und dann erst den Nenner entfernen zu lassen; also:

$$\frac{57 - 3x}{6} - \frac{78 - 2x}{6} = \frac{-24}{6},$$

$$57 - 3x - 78 + 2x = -24, \text{ u. s. w.}$$

6) Steht die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen, so kann dieses dadurch beseitigt werden, daß man beide Seiten der Gleichung zum Wurzelexponenten potenzirt.

Ist $\sqrt{x + 2} = 3$ die vorgelegte Gleichung und man erhebt beide Seiten auf das Quadrat, so erhält man: $x + 2 = 9$ und hieraus $x = 7$.

e) Gang bei der Auflösung einer Gleichung.

Bei der Auflösung einer Gleichung schlägt man im allgemeinen folgenden Gang ein:

1) Man befreit die vorgelegte Gleichung von den Klammern, Nennern und Wurzeln, welche die Unbekannte enthalten, man reduciert (entwickelt) die Gleichung. Die Klammern werden dadurch entfernt, daß man die an ihnen angedeutete Rechnung vollzieht; die Nenner beseitigt man durch Multiplikation sämtlicher Glieder der Gleichung mit dem Generalnenner aller Brüche; um endlich eine in einer Gleichung vorhandene Wurzel fortzuschaffen, isoliert man dieselbe von allen übrigen Gliedern durch Transposition und potenziert hierauf beide Seiten der Gleichung auf den Grad des Wurzelexponenten. Nach jeder dieser drei Operationen aber faßt man etwaige gleichnamige Glieder zusammen und hebt gemeinschaftliche Faktoren auf.

2) Hierauf ordnet man die reducierte Gleichung, indem man transponiert, die gleichnamigen Glieder zusammenfaßt und schließlich die höchste Potenz der Unbekannten von ihrem Koëfficienten befreit. — Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel:

$$\frac{16\sqrt{x + 3}}{x - 2} - (16 - 2x) = \frac{2(24 - 3x)}{x - 2} + 2x - 7.$$

Klammern gelöst und die 2 Glieder 2x weggelassen:

$$\frac{16\sqrt{x + 3}}{x - 2} - 16 = \frac{48 - 6x}{x - 2} - 7.$$

Die Nenner fortgeschafft:

$$16\sqrt{x + 3} - 16x + 32 = 48 - 6x - 7x + 14.$$

Die Wurzel isolirt und gleichnamige Glieder zusammengefaßt:

$$16\sqrt{x+3} = 3x + 30.$$

Mit 2 potenziert und die Klammern aufgelöst:

$$256x + 768 = 9x^2 + 180x + 900.$$

Transponiert und zusammengefaßt:

$$-9x^2 + 76x = 132.$$

Die ganze Gleichung mit — 1 multipliciert und durch 9 dividiert:

$$x^2 - \frac{76x}{9} = -\frac{132}{9}.$$

Die weitere Auflösung dieser Gleichung folgt später.

A. Gleichungen des ersten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

§. 42. Auflösung gegebener Gleichungen.

Die Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten sind durch das Reducieren und Ordnen derselben bereits gelöst. Zur näheren Erläuterung des im vorigen §. angedeuteten Verfahrens folgen nachstehend einige vollständig aufgelöste Gleichungen.

I. Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

(Numerische Gleichungen).

1) $10x - 16 - 5x + 6 = 100 - 12x + 3x + 2.$

Transponiert u. addiert: $14x = 112.$

x isoliert: $x = 8.$

Denk- und Sprechweise. Auf der linken Seite sind $(+10x) + (-5x) = +5x$, auf der rechten Seite $(-12x) + (+3x) = -9x$. Letztere schaffe ich auf die linke Seite und erhalte hier $(+5x) + (+9x) = 14x$. Ferner ist $(-16) + (+6)$ der linken Seite $= -10$ und $(+100) + (+2)$ der rechten Seite $= +102$. Bringe ich -10 von der linken Seite auf die rechte, so erhalte ich hier $(+102) + (+10) = +112$. Mithin heißt die Gleichung jetzt $14x = 112$, und hieraus ist $x = 8$.

2) $100 - x = 84.$

Transponiert u. addiert: $16 = x.$

Oder: $x = 16.$

Erläuterung. In der Regel bringt man beim Transponieren die Glieder mit x auf die linke Seite der Gleichung. Bekommt x hiedurch auf der linken Seite einen negativen Koëfficienten (wird negativ), so kann man von dieser Regel abweichen, die Glieder mit x auf die rechte Seite bringen und dann die Gleichung

$a = x$ umstellen in $x = a$. Man kann aber auch in diesem Falle die Glieder mit x auf die linke Seite schaffen und dann die Gleichung mit -1 multiplicieren.

3) $20x - (30x - 51) = 44 - (8x + 3)$.

Die Kl. aufgel.: $20x - 30x + 51 = 44 - 8x - 3$.

Transp. und addiert: $-2x = -10$.

Mit -1 multipliciert: $2x = 10$.

x isoliert: $x = 5$.

4) $$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} - \frac{5x}{6} = 2x - 60 - \frac{x}{15}.$$

Transponiert u. addiert: $-x = -60$.

Mit -1 multipliciert: $x = 60$.

Denk- und Sprechweise: $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x = \frac{7}{6}x$; $\frac{7}{6}x - \frac{5}{6}x = \frac{1}{3}x$; $\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}x = \frac{14}{15}x$; $2x - \frac{1}{15}x = 1\frac{14}{15}x$; $\frac{14}{15}x + (-1\frac{14}{15}x) = -x$. Mithin kommt auf die linke Seite $-x$ 2c. 2c. Es empfiehlt sich, vor der Wegschaffung der Brüche die Glieder der Gleichung soviel wie möglich zusammenzuziehen, weil die Multiplikation alsdann nur an wenigen Gliedern auszuführen ist.

5) $$\frac{5x - 3}{9} + 4 = \frac{6x + 4}{5} - \frac{51 - x}{45}.$$

Die Nenner beseitigt: $25x - 15 + 180 = 54x + 36 - 51 + x$.

Transponiert und addiert: $-30x = -180$.

Mit -1 multipliciert: $30x = 180$.

x isoliert: $x = 6$.

6) $$\frac{3 - 4x}{x + 2} = \frac{12 - 6x}{x - 2} - 10 + \frac{12x^2 - 6}{x^2 - 4}.$$

Mit dem Generalnenner $x^2 - 4$ multipliciert, erhält man:

$(3 - 4x)(x - 2) = (12 - 6x)(x + 2) - 10(x^2 - 4) + 12x^2 - 6$.

Die Klammern aufgelöst, kommt:

$$3x - 4x^2 - 6 + 8x = 12x + 24 - 6x^2 - 12x - 10x^2 + 40 + 12x^2 - 6.$$

Transp. und zusammengefaßt: $11x = 64$.

x isoliert: $x = 5\frac{9}{11}$.

7) $$\frac{x + 5}{9x - 15} - \frac{4x + 5}{27x + 45} = \frac{15x - 1\frac{1}{3}x^2 + 183\frac{1}{3}}{36x^2 - 100}.$$

$$\frac{x + 5}{3(3x - 5)} - \frac{4x + 5}{9(3x + 5)} = \frac{15x - 1\frac{1}{3}x^2 + 183\frac{1}{3}}{4(3x + 5)(3x - 5)}.$$

$(x + 5)(3x + 5)12 - (4x + 5)(3x - 5)4 = 135x - 12x^2 + 1650$.

$36x^2 + 240x + 300 - 48x^2 + 20x + 100 = 135x - 12x^2 + 1650$.

$125x = 1250$.

$x = 10$.

II. Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

(Buchstabengleichungen).

1) $nx - amn + m(b - x) = d - mnx.$

Kl. aufgelöst und transponiert:

$$nx - mx + mnx = d + amn - bm.$$

Den gemeins. Faktor x ausgeschieden:

$$x(n - m + mn) = d + amn - bm.$$

x isoliert: $x = \frac{d + amn - bm}{n - m + mn}.$

2) $\frac{ab^2 + abd - abx}{d - c} = ax - ac.$

Die ganze Gleichung mit $d - c$ multipliciert, erhält man:

$$ab^2 + abd - abx = ax(d - c) - ac(d - c).$$

Die Klammern gelöst: $ab^2 + abd - abx = adx - acx - acd + ac^2.$

Transponiert: $acx - abx - adx = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$

Den gemeinsamen Faktor x herausgetrennt:

$$x(ac - ab - ad) = ac^2 - ab^2 - acd - abd.$$

x isoliert: $x = \frac{ac^2 - ab^2 - acd - abd}{ac - ab - ad}.$

Die Division ausg.: $x = c + b.$

3) $\frac{3abc}{a + b} + \frac{a^2b^2}{(a + b)^3} + \frac{(2a + b)b^2x}{a(a + b)^2} = 3cx + \frac{bx}{a}.$

Dividiert man mit den einzelnen Nennern in den Generalnenner, der $a(a + b)^3$ ist und multipliciert sämtliche Zähler mit dem erhaltenen Quotienten, so ergibt sich:

$$3a^2bc(a + b)^2 + a^3b^2 + (2a + b)(a + b)b^2x =$$
$$3ac(a + b)^3x + b(a + b)^3x.$$

Transponiert, mit (— 1) multipliciert und x herausgetrennt:

$$[3ac(a + b)^3 + b(a + b)^3 - (2a + b)(a + b)b^2]x =$$
$$3a^2bc(a + b)^2 + a^3b^2.$$

Sämtliche Glieder der linken Seite haben den Faktor $(a + b)$ und die der rechten Seite ab gemein; diese herausgetrennt, kommt:

$$(a + b)[3ac(a + b)^2 + b(a + b)^2 - (2a + b)b^2]x =$$
$$ab[3ac(a + b)^2 + a^2b].$$

Ausmultipliciert:

$$(a + b)[3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b + 2ab^2 + b^3 - 2ab^2 - b^3]x =$$
$$ab[3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b].$$

Zusammengefaßt:

$$(a+b)(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b)x = ab(3a^3c+6a^2bc+3ab^2c+a^2b),$$

folglich:

$$x = \frac{ab(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)}{(a + b)(3a^3c + 6a^2bc + 3ab^2c + a^2b)}$$

$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

III. Gleichungen mit Wurzelausdrücken.
(Wurzelgleichungen).

1) $\sqrt{16x^2 - 31} + 1 = 4x.$

Den Wurzelausdruck isoliert: $\sqrt{16x^2 - 31} = 4x - 1.$

Beide Seiten mit 2 potenziert: $16x^2 - 31 = (4x - 1)^2.$

Oder: $16x^2 - 31 = 16x^2 - 8x + 1.$

Transponiert und addiert: $8x = 32.$

x isoliert: $x = 4.$

2) $12x - 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65} = 15 - 3x.$

Die Wurzelgr. isoliert: $15x - 15 = 3\sqrt{25x^2 - 20x - 65}.$

Durch 3 dividiert: $5x - 5 = \sqrt{25x^2 - 20x - 65}.$

Mit 2 potenziert: $25x^2 - 50x + 25 = 25x^2 - 20x - 65.$

Transponiert und addiert: $30x = 90.$

x isoliert: $x = 3.$

3) $5x + 1 = 4(2 + x) + \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$

Die Wurzelg. isoliert: $x - 7 = \sqrt{49 - x\sqrt{x^2 - 56}}.$

Beide Seiten quadriert: $(x - 7)^2 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$

Klammer gelöst: $x^2 - 14x + 49 = 49 - x\sqrt{x^2 - 56}.$

Zusammengefaßt und den Wurzelausdruck isoliert:

$$x\sqrt{x^2 - 56} = 14x - x^2.$$

Mit 2 potenziert: $x^2(x^2 - 56) = (14x - x^2)^2.$

Klammern gelöst: $x^4 - 56x^2 = 196x^2 - 28x^3 + x^4.$

Zusammengezogen: $28x^3 - 252x^2 = 0.$

Durch x^2 dividiert: $28x = 252.$

x isoliert: $x = 9.$

4) $\sqrt{x - 6} + \sqrt{x + 5} = 11.$

Mit 2 potenziert:

$$x - 6 + 2\sqrt{(x - 6)(x + 5)} + x + 5 = 121.$$

Vereinfacht und Klammern gelöst:

$$2x - 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 30} = 121.$$

Den Wurzelausdruck isoliert:

$$2\sqrt{x^2 - x - 30} = 122 - 2x.$$

Durch 2 dividiert: $\sqrt{x^2 - x - 30} = 61 - x.$

Mit 2 potenziert: $x^2 - x - 30 = (61 - x)^2.$

Klammern gelöst: $x^2 - x - 30 = 3721 - 122x + x^2.$

Transponiert und zusammengezogen:

$$121x = 3751.$$
$$x = 31.$$

5) $\sqrt{x - 9} + \sqrt{x + 12} = \sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 3}.$

$$(\sqrt{x - 9} + \sqrt{x + 12})^2 = (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 3})^2.$$

$$x - 9 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 108} + x + 12 =$$
$$x - 4 + 2\sqrt{x^2 - x - 12} + x + 3.$$
$$2\sqrt{x^2 + 3x - 108} = 2\sqrt{x^2 - x - 12} - 4.$$
$$\sqrt{x^2 + 3x - 108} = \sqrt{x^2 - x - 12} - 2.$$
$$(\sqrt{x^2 + 3x - 108})^2 = (\sqrt{x^2 - x - 12} - 2)^2.$$
$$x^2 + 3x - 108 = x^2 - x - 12 - 4\sqrt{x^2 - x - 12} + 4.$$
$$4\sqrt{x^2 - x - 12} = 100 - 4x.$$
$$\sqrt{x^2 - x - 12} = 25 - x.$$
$$(\sqrt{x^2 - x - 12})^2 = (25 - x)^2.$$
$$x^2 - x - 12 = 625 - 50x + x^2.$$
$$49x = 637.$$
$$x = 13.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 31.

§. 43. Aufstellung von Gleichungen für Textaufgaben und Auflösung derselben.

1) Soll eine in Worten gegebene Aufgabe durch eine Bestimmungsgleichung gelöst werden, so hat man zunächst die Angaben der Aufgabe in die mathematische Sprache zu übersetzen. Zu dem Zwecke nimmt man die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet sie mit x und vollzieht an derselben andeutungsweise alle die

Verknüpfungen, welche die Aufgabe vorschreibt. Hiedurch muß man zwei Ausdrücke zu erhalten suchen, welche einander gleichgesetzt werden können. Dieses Übersetzen des Ausdrucks der Worte einer Aufgabe in die mathematische Sprache nennt man die Bildung, den Ansatz oder die Synthesis der Gleichung. Die aus den beiden gleichen Ausdrücken gebildete Bestimmungsgleichung wird nach den Regeln des §. 41 aufgelöst. Aus ihr resultiert die zu suchende Zahl.

2) Wie man ersieht, lassen sich für die Aufstellung der Bestimmungsgleichung einer Aufgabe keine bestimmten Regeln geben; sie ist von der Beschaffenheit der vorliegenden Aufgabe bedingt und Sache der Überlegung des Rechnenden [1]).

3) Um zu zeigen, wie bei der Aufstellung von Bestimmungsgleichungen für Textaufgaben zu verfahren ist, sollen im Nachfolgenden einige Beispiele ausführlich erörtert werden.

1) Wenn man eine gewisse Zahl mit a = 3 multipliciert, zu dem Produkte b = 8 addiert, die Summe durch c = 4 dividiert, endlich von dem Quotienten d = 5 subtrahiert, so erhält man m = 15; wie heißt die Zahl?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Die zu suchende Zahl sei	x
Alsdann ist die mit a multiplicierte Zahl .	ax

1) Gerade diese Übungen, also die Bildung von Gleichungen aus Textaufgaben, sind für die Ausbildung des Denkens der Schüler von besonderer Bedeutung und daher eingehend zu pflegen. Sie sind den Übersetzungsübungen aus einer Sprache in die andere vollständig an die Seite zu stellen. Keine sprachliche Übersetzung erfordert Punkt für Punkt mehr Klarheit über den Inhalt des Übersetzten als das Übersetzen einer Textaufgabe in eine Gleichung. Dazu kommt noch, daß sich auf verschiedene Weise aus Textaufgaben Gleichungen bilden lassen, was ebenfalls für die Schulung im Denken sehr wertvoll ist. „Hier handelt es sich nicht um ein Denken nach einem Systeme, sondern gerade um Ausbildung einer gewissen Beweglichkeit und Freiheit des Denkens, die imstande ist, denselben Gedanken von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu betrachten und den in jedem Falle notwendigen Gesichtspunkt zu wählen". Wie stimmt damit die Behauptung, „die mathematisch-physikalische Bildung bringe ein Denken hervor, dem es an Biegsamkeit und Beweglichkeit gebricht?"

Das um b vermehrte Produkt . . . . $ax + b$

Die durch c dividierte Summe . . . . $\frac{ax + b}{c}$

Und der um d verminderte Quotient . . . $\frac{ax + b}{c} - d.$

Da nun diese Differenz gleich m ist, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{ax + b}{c} - d = m.$$

Mit c multipliciert: $ax + b - cd = cm.$

Transponiert: $ax = cm - b + cd.$

x isoliert: $x = \frac{c(d + m) - b}{a}.$

Die geg. Z. eingesetzt: $x = \frac{4(5 + 15) - 8}{3}.$

Das ist: $x = 24.$

b) Mit den gegebenen Zahlen.

α) Algebraisch.

Die zu suchende Zahl sei x

Alsdann ist die mit 3 multiplicierte Zahl . . $3x$

Und das um 8 vermehrte Produkt . . . . $3x + 8$

„ die durch 4 dividierte Summe . . . . $\frac{3x + 8}{4}$

„ der um 5 verminderte Quotient . . . . $\frac{3x + 8}{4} - 5.$

Da nun die so erhaltene Zahl 15 sein soll, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\frac{3x + 8}{4} - 5 = 15.$$

Den Nenner beseitigt: $3x + 8 - 20 = 60.$

Transponiert u. zusg.: $3x = 72.$

x isoliert: $x = 24.$

β) Arithmetisch.

Die Zahl 15 ist dadurch entstanden, daß man von einer andern Zahl 5 subtrahierte; diese Zahl ist demnach $15 + 5 = 20$. Diese Zahl 20 ist nach der Aufgabe der Quotient einer Zahl, dessen Divisor

4 beträgt; folglich ist der Dividendus $4 \cdot 20 = 80$. Die Zahl 80 entstand aus einer andern Zahl durch Addition der Zahl 8 zu ihr; weshalb diese andere Zahl $80 - 8 = 72$ ist. Da nun 72 nach der Aufgabe das Dreifache der gedachten Zahl ist, so muß diese selbst $72 : 3 = 24$ sein.

Zusätze. 1) Die in einer Aufgabe gesuchte Zahl muß durch die darin gegebenen anderen Zahlen bestimmt sein. So ist z. B. die in der vorigen Aufgabe gesuchte Zahl x durch die gegebenen Zahlen 3, 8, 4, 5 und 15 vollständig bestimmt. Die Hauptsache der Auflösung einer Aufgabe besteht nun offenbar darin, daß dargelegt wird, wie die gegebenen Zahlen mit einander verbunden werden müssen, damit sich die gesuchte Zahl ergibt, daß also ein Gesetz oder eine Auflösungsformel aus der Aufgabe abgeleitet wird. Um das Gesetz, welches mit einem Blicke ersehen läßt, auf welche Weise eine gesuchte Zahl aus gegebenen Zahlen entsteht, zu finden, kann man die mit einander in Beziehung stehenden Zahlen mit Buchstaben andeuten, die Beziehungen durch eine Gleichung ausdrücken und diese dann auf die gesuchte Größe reducieren. Auf diese Weise wurde oben unter a) für die gesuchte Zahl x die Formel

$$x = \frac{c(d + m) - b}{a}$$

gefunden. In Worten ausgesprochen, lautet dieselbe: Man findet aus den gegebenen Zahlen 3, 8, 4, 5 und 15 die unbekannte Zahl, wenn man die Summe von 5 und 15 mit 4 multipliciert, hievon 8 subtrahiert und die erhaltene Differenz durch 3 dividiert. Hat man mit Hilfe von Buchstaben eine allgemeine Auflösungsformel (das allgemeine Resultat) entwickelt, so braucht man nur, um die Aufgabe mit Berücksichtigung der gegebenen bestimmten Zahlen zu lösen, letztere in die Formel einzusetzen.

2) Da die allgemeine Auflösung von Aufgaben dem Anfänger mehr Schwierigkeit bereitet als die mit bestimmten Zahlen, so wird man gut thun, anfangs von der ersteren nur beschränkten Gebrauch zu machen. Es empfiehlt sich, zuerst die Aufgaben mit den bestimmten Zahlen, dann mit den Buchstaben (also allgemein) lösen und schließlich die Substitutionen in das allgemeine Resultat vornehmen zu lassen. Auf diese Weise lernt der Schüler zunächst den Wert und die Bedeutung allgemeiner Rechnungen einsehen, indem das in Buchstaben dargestellte Resultat, in Worten ausgedrückt, zur Rechenregel wird, nach welcher bestimmte Gruppen

von Aufgaben mechanisch aufgelöst werden können. Dies gilt namentlich von den sog. bürgerlichen Rechnungsarten. Der Schüler bekommt aber auch hierdurch allmählich ein Verständnis des Begriffs einer Beziehungsgleichung, welche die gegenseitige Abhängigkeit verschiedener mit einander verbundener Größen darstellt, und welche je nachdem es nötig ist, auf jede einzelne dieser Größen reduciert werden kann. (Man vergl. Beispiel 3 und 4!)

3) Die obige, in bestimmten Zahlen ausgedrückte Aufgabe ist sowohl algebraisch als arithmetisch aufgelöst. Zwischen beiden Auflösungsweisen findet folgender Unterschied statt. Bei dem arithmetischen Verfahren (bei der „Lösung durch Schlüsse“, oder bei der „Auflösung durch Raisonnement“ [1])) schreitet man vom Bekannten zum Unbekannten vorwärts, setzt das gesuchte Resultat der Aufgabe aus den gegebenen bekannten Daten [2]) zusammen, geht synthetisch zu Werke; bei dem algebraischen Verfahren dagegen nimmt man die vorgelegte Aufgabe als gelöst, die zu suchende Zahl als gefunden an, bezeichnet deshalb die Unbekannte und führt sie gleich mit in die Rechnung ein, man stellt eine Bestimmungsgleichung auf, die man sodann auflöst (analytische Auflösungsweise).

4) Es ist sehr geistbildend, die durch Gleichungen gelösten Aufgaben auch nach dem arithmetischen Verfahren aufzulösen. Beide Verfahrungsarten müssen daher geübt werden.

2) Wenn man eine gewisse Zahl mit a = 6 multipliciert, zum Produkte b = 5 addiert, die Summe durch c = 4 dividiert, den Quotienten um d = 7 vermehrt, das Resultat durch e = 3 dividiert, von dem nunmehrigen Quotienten f = 2 subtrahiert und endlich diesen Rest mit g = $1\frac{1}{3}$ multipliciert, so erhält man die gesuchte Zahl. Wie heißt sie?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Buchstaben.

Die zu suchende Zahl sei	x
Alsdann ist die mit a multiplicierte Zahl	ax
Das um b vermehrte Produkt	$ax + b$
Die durch c dividierte Summe	$\frac{ax + b}{c}$

1) Spr. Räsonn'mān (mit Nasenlaut), vernünftige Gedankenfolge, Vernunftschlüsse. 2) Vom lat. datum, pl. data, das Gegebene.

Der um d verm. Quotient . . $\frac{ax + b}{c} + d = \frac{ax + b + cd}{d}$

Das durch e dividierte Resultat . . . . . . $\frac{ax + b + cd}{ce}$

Der um f verminderte Quotient . . . . $\frac{ax + b + cd - cef}{ce}$

Und der mit g multiplicierte Quotient $\frac{ax + b + cd - cef}{ce} \cdot g.$

Daher die Gleichung:

$$\frac{ax + b + cd - cef}{ce} \cdot g = x.$$

Mit ce mult.: $agx + bg + cdg - cefg = cex.$
Transponiert: $agx - cex = - bg - cdg + cefg.$
Mit — 1 mult.: $cex - agx = bg + cdg - cefg.$
Zusammengez.: $x(ce - ag) = (b + cd - cef)g.$

x isoliert: $x = \frac{(b + cd - cef)g}{ce - ag}.$

Die geg. Zahlen eing.: $x = \frac{(5 + 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 \cdot 2)1\frac{1}{3}}{4 \cdot 3 - 6 \cdot 1\frac{1}{3}}.$

Das ist: $x = 3.$

b) Mit den gegebenen Zahlen.

Wie unter a).

3) Es soll die gegenseitige Abhängigkeit der 4 Größen: Kapital, C, Prozente (Zinsfuß), p, Zeit, T, und Zinsen, Z, durch eine Gleichung ausgedrückt werden!

Auflösung. Das Kapital 100 (Mark, Thaler) trägt in der Zeiteinheit (in 1 Jahr, 1 Monat) die Zinsen p, mithin das Kapital C (600, 50 . .) in dieser Zeiteinheit so vielmal p, als 100 in C enthalten ist, also $\frac{C}{100} \cdot p$ und in der Zeit T (6 Jahre, 6 Monate, in T Zeiteinheiten) die Zinsen $\frac{C}{100} \cdot p \cdot T = \frac{CpT}{100}$. Die verlangte Gleichung ist mithin:

$$1)\ Z = \frac{CpT}{100}.$$

Aus dieser Gleichung 1) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$2)\ C = \frac{100Z}{pT}.$$

$$3)\ p = \frac{100Z}{CT}.$$

$$4)\ T = \frac{100Z}{Cp}.$$

Man drücke diese 4 Gleichungen in Worten aus!

4) Es sollen Gleichungen aufgestellt werden, die den Zusammenhang unter den Größen:

Angelegtes Kapital	C
Prozent (Zinsfuß)	p
Zeit, während C steht	T
Kapital und einfacher Zins in T	C′

ausdrücken!

Auflösung. Nach 3) repräsentiert der Ausdruck $\frac{CpT}{100}$ die Zinsen in T Zeiteinheiten des Kapitals C zu p Prozent; mithin stellt der Ausdruck: $C+\frac{CpT}{100}$ das Kapital samt den Zinsen desselben in T Zeiteinheiten dar. Man erhält folglich, da diese Größe durch C′ bezeichnet werden soll, die Gleichung:

$$1)\ C' = C + \frac{CpT}{100}.$$

Will man nun diese Gleichung für die 3 andern Größen auflösen, so schaffe man zunächst den Nenner weg; hiedurch erhält man:

$$100 \cdot C' = 100 \cdot C + CpT.$$

Die beiden Seiten vertauscht: $100C + CpT = 100C'$.

C herausgetrennt: $C(100 + pT) = 100C'$,

und hieraus: $2)\ C = \frac{100C'}{100 + pT}.$

Aus der Gleichung: $100C + CpT = 100C'$

erhält man: $CpT = 100C' - 100C$

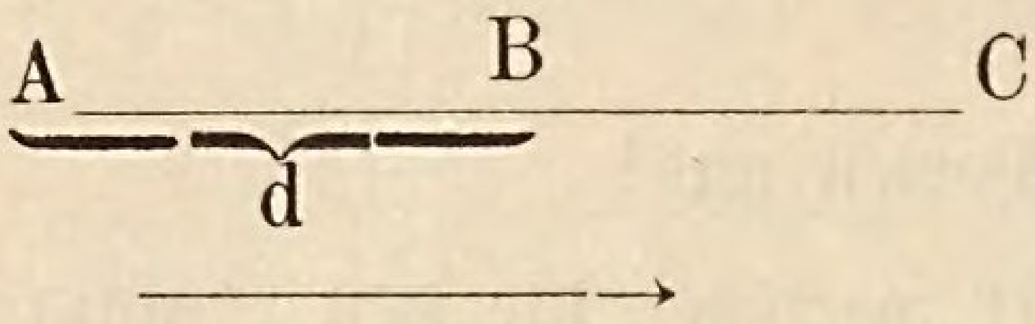
und hieraus: $3)\ p = \frac{100C' - 100C}{CT} = \frac{100(C' - C)}{CT}$

und: $4)\ T = \frac{100C' - 100C}{Cp} = \frac{100(C' - C)}{Cp}.$

5) Zwei Körper bewegen sich von zwei Punkten A und B, deren Entfernung d Meter ist, nach derselben Richtung. Der

erste legt in der Zeiteinheit c Meter, der zweite, nachfolgende, in jener Zeiteinheit c_1 Meter zurück. Wann werden beide Körper zusammentreffen?

Auflösung. Angenommen, beide Körper treffen in x Zeiteinheiten zusammen, und AC stelle den Weg dar, den beide Körper bis zum Zusammentreffen durchlaufen[1]). Der Weg des zweiten Körpers ist dann c_1x Meter und der des ersten $d + cx$ Meter. Da diese Wege einander gleich sind, so erhält man die Gleichung:



$$c_1x = d + cx,$$

Oder:

$$c_1x - cx = d,$$

$$x(c_1 - c) = d,$$

Mithin:

$$x = \frac{d}{c_1 - c}.$$

Diskussion[2]) dieses Resultats. Die Auflösung dieser Aufgabe ist nur dann möglich, wenn $c_1 > c$ ist, denn ein Körper kann einen andern, der einen Vorsprung hat, offenbar nur dann einholen, wenn der erstere eine größere Geschwindigkeit hat. Ist $c_1 = c$ und $d > 0$, so wird die gesuchte Zeit gleich ∞. Wenn zugleich $c_1 = c$ und $d = 0$ ist, so erhält man als Resultat $\frac{0}{0}$. Ist endlich $c_1 < c$, so wird das Resultat negativ, was hier im allgemeinen einen inbezug auf die gestellte Frage unmöglichen Wert bedeutet, da beide Körper nicht mehr zusammentreffen können, wenn der nachfolgende eine kleinere Geschwindigkeit besitzt als der vorhergehende. Denkt man sich aber, daß die Bewegung schon eine beliebig lange Zeit vor sich ging, bevor die Körper die wechselseitige Entfernung d hatten, so deutet das negative Resultat auf die verflossene Zeit hin. Ist z. B. $d = 30$ Tage, $c_1 = 5$ und $c = 7$ Meilen, so ist

$$x = \frac{30}{5 - 7} = \frac{30}{-2} = -15 \text{ (Tage)},$$

d. h. vor 15 Tagen trafen beide Körper in ihren Bewegungen an demselben Orte zusammen; denn $5 - 7 = -2$ deutet an, daß der Körper

1) Es empfiehlt sich, überall wo es möglich ist, den Sinn einer Aufgabe durch eine Figur zu erläutern, wenn dieselbe auch ganz einfacher Art ist; denn hierdurch wird dem Schüler die Auffassung der gesuchten Beziehungen zwischen den Größen wesentlich erleichtert. 2) Lat. discussio, die Untersuchung, die Erörterung durch Austausch der verschiedenen Ansichten.

mit der Geschw. c_1 jeden Tag später 2 Meilen mehr hinter dem andern zurückbleibt, oder jeden Tag früher 2 Meilen weniger, daß er mithin 15 Tage früher, d. h. vor 15 Tagen, gerade 30 Meilen weniger hinter dem andern zurück war, als jetzt, d. h. daß er damals gerade mit ihm zusammentraf[1]).

6) A hat von einer Summe $\frac{1}{3}$ zu 4 % 2 Jahre, $\frac{1}{5}$ derselben + 200 ℳ zu 5 % $2\frac{3}{4}$ Jahre und den Rest zu $4\frac{1}{2}$ % $3\frac{1}{3}$ Jahre ausstehen. Wie groß ist diese Summe, wenn er im ganzen 1115 ℳ Zinsen erhält?

Auflösung.

Algebraisch.

1) Bezeichnet man die ganze Summe mit x ℳ, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{x \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 100} + \frac{(\frac{1}{5}x + 200) \cdot 5 \cdot 11}{4 \cdot 100} + \frac{(\frac{7}{15}x - 200) \cdot 9 \cdot 10}{100 \cdot 2 \cdot 3} = 1115.$$

$$\frac{2x}{75} + \frac{\frac{11}{5}x + 2200}{80} + \frac{\frac{21}{15}x - 600}{20} = 1115.$$

$$\frac{2x}{75} + \frac{11x + 11000}{400} + \frac{7x - 3000}{100} = 1115.$$

$$32x + 33x + 33000 + 84x - 36000 = 1338000.$$

$$149x = 1341000$$

$$x = 9000 \text{ ℳ}$$

als das zu suchende Kapital.

Zusatz. Der zweite Teil beträgt $\frac{x}{5} + 200 = \frac{x + 1000}{5}$, und der Zins hievon: $\frac{x + 1000}{5 . 100} . 5 . \frac{11}{4} = \frac{11x + 11000}{400}$.

Der dritte Teil beträgt $\frac{7}{15}x - 200 = \frac{7x - 3000}{15}$, und der Zins hievon: $\frac{7x - 3000}{15 . 100} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{7x - 3000}{100}$. Nach dieser Darstellung wird obige Gleichung verständlicher werden.

2)[2]) Die Gleichung kann auch heißen:

$$\frac{x \cdot 4 \cdot 2}{3 \cdot 100} + \frac{x \cdot 5 \cdot 11}{5 \cdot 100 \cdot 4} + \frac{200 \cdot 5 \cdot 11}{100 \cdot 4} + \frac{7x \cdot 9 \cdot 10}{15 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 100} - \frac{200 \cdot 9 \cdot 10}{100 \cdot 2 \cdot 3} = 1115.$$

---

1) Die Diskussion allgemeiner Resultate und die Deutung negativer Ergebnisse bieten für fähige Schüler eine ausgezeichnete Denkübung.

2) Diese fortlaufenden Ziffern bezeichnen immer verschiedene Lösungsweisen. Man vergleiche hierüber Note S. 140.

Oder: $\frac{2x}{75} + \frac{11x}{400} + 27{,}5 + \frac{7x}{100} - 30 = 1115.$

$$\frac{2}{75}x + \frac{11x}{400} + \frac{7x}{100} = 1117{,}5.$$

$$32x + 33x + 84x = 1117{,}5 \cdot 1200,$$

$$149x = 1341000,$$

$$x = 9000.$$

Arithmetisch.

1) Angenommen, die Summe sei 1500 ℳ. Alsdann ist $\frac{1}{3}$ hiervon 500 ℳ und diese bringen $\frac{500 \cdot 4 \cdot 2}{100} = 40$ ℳ Zinsen.

Ferner ist $\frac{1}{5}$ davon $= 300$ ℳ, und diese bringen $\frac{300 \cdot 5 \cdot 11}{100 \cdot 4} = 41\frac{1}{4}$ ℳ.

Der Rest von $\frac{7}{15} = 700$ ℳ bringt $\frac{700 \cdot 9 \cdot 10}{100 \cdot 3 \cdot 2} = 105$ ℳ.

Würden also nur die reinen Bruchteile von 1500 ℳ in der angegebenen Weise verzinslich angelegt sein, so betrüge der Zins $40 + 41\frac{1}{4} + 105$ ℳ $= 186\frac{1}{4}$ ℳ. Es sind aber außerdem im ganzen noch 200 ℳ mehr und 200 ℳ weniger ausgeliehen, und zwar erstere zu $5\,\%$ auf $2\frac{3}{4}$ Jahre, die mithin $2 \cdot 5 \cdot 2\frac{3}{4} = 27\frac{1}{2}$ ℳ tragen, und letztere zu $4\frac{1}{2}\,\%$ auf $3\frac{1}{3}$ Jahre; davon ist der Zins $2 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{10}{3} = 30$ ℳ.

Wäre also bloß das ganze Fünftel des Kapitals zu $5\,\%$ auf $2\frac{3}{4}$ Jahre und ebenso der ganze Rest von $\frac{7}{15}$ (nicht 200 ℳ weniger) ausgeliehen worden, so müßte der Zins im ganzen $27\frac{1}{2}$ ℳ weniger und 30 ℳ mehr betragen, d. i. $2\frac{1}{2}$ ℳ mehr; also hätte er $1115 + 2\frac{1}{2}$ ℳ $= 1117\frac{1}{2}$ ℳ betragen.

Es sind mithin so oftmal 1500 ℳ gewesen, als $186\frac{1}{4}$ ℳ in $1117\frac{1}{2}$ ℳ enthalten sind $= 6 \cdot 1500 =$ **9000** ℳ.

2) Die ganze zu suchende Summe sei 1 Tl.

Der Zins von $\frac{1}{3}$ derselben ist $1 \cdot \frac{1}{25} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{75}$ Tl.

" " " $\frac{1}{5}$ " " $1 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{11}{400}$ Tl.

" " " 200 ℳ ist $2 \cdot 5 \cdot 2\frac{3}{4} = 27\frac{1}{2}$ ℳ.

" " " $\frac{7}{15}$ Tl. ist $1 \cdot \frac{9}{200} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{100}$ Tl.

" " " — 200 ℳ $= - 2 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} = - 30$ ℳ.

Es ist daher:

$\frac{2}{75}$ Tl. + $\frac{11}{400}$ Tl. + $27\frac{1}{2}$ ℳ + $\frac{7}{100}$ Tl. — 30 ℳ = 1115

$\frac{149}{1200}$ Tl. = 1117,5

149 Tl. = 1341000

1 Tl. = 9000 ℳ.

7) Ein Kaufmann vermehrt sein Vermögen jährlich um die Hälfte, scheidet aber von demselben alle Jahre 2000 ℳ zu seinem Unterhalte aus. Dadurch hat sich das anfängliche Vermögen nach 3 Jahren um 1000 ℳ über das $2\frac{1}{2}$fache desselben vermehrt. Wie groß war das Vermögen anfangs?

Auflösung.

a) Algebraisch.

1) Das anfängliche Vermögen sei . . . . x ℳ.

Alsd. ist d. V. am Ende d. 1. J.: $\frac{3x}{2} - 2000 = \ldots \frac{3x - 4000}{2}$.

Und " " " 2. " $\frac{3}{2} \cdot \frac{3x - 4000}{2} - 2000 = \ldots \frac{9x - 20000}{4}$.

" " " " 3. " $\frac{3}{2} \cdot \frac{9x - 20000}{4} - 2000 = \frac{27x - 76000}{8}$.

Da nun dieses Vermögen um 1000 ℳ größer ist als das $2\frac{1}{2}$fache des ursprünglichen, so erhält man die folgende Gleichung:

$$\frac{27x - 76000}{8} = \frac{5x}{2} + 1000.$$

Mit 8 multipliciert: $27x - 76000 = 20x + 8000$.

Transp. und zusammengefaßt: $7x = 84000$.

x isoliert: $x = 12000$ ℳ als anfängliches Vermögen.

2) Das anfängliche Vermögen mit x ℳ bezeichnet, erhält man nach den Bedingungen der Aufgabe die folgende Gleichung:

$$\tfrac{3}{2} \cdot (\tfrac{3}{2} \cdot (\tfrac{3}{2}x - 2000) - 2000) - 2000 = \tfrac{5}{2}x + 1000.$$

Daraus folgt: $x = 12000$ ℳ.

b) Arithmetisch.

1) Am Ende des ersten Jahres besitzt der Kaufmann das $1\frac{1}{2}$fache seines ursprünglichen Vermögens weniger 2000 ℳ.

Am Ende des zweiten Jahres besitzt er $1\frac{1}{2}$ mal soviel als am Ende des ersten Jahres weniger 2000 ℳ, d. i. $2\frac{1}{4}$ mal soviel als anfangs weniger 5000 ℳ.

Am Ende des dritten Jahres endlich hat er $1\frac{1}{2}$ mal soviel als am Ende des zweiten Jahres weniger 2000 M, d. i. $3\frac{3}{8}$ mal soviel als anfangs weniger 9500 M.

Nach der Aufgabe besitzt er aber am Ende des dritten Jahres $2\frac{1}{2}$ mal soviel als anfangs und 1000 M. Daraus folgt, daß $3\frac{3}{8}$ des ursprünglichen Vermögens weniger 9500 M ebenso viel ist als das $2\frac{1}{2}$fache desselben und 1000 M, oder das $3\frac{3}{8}$fache des ursprünglichen Vermögens ebensoviel, als das $2\frac{1}{2}$fache desselben + 1000 + 9500 oder + 10500.

Demnach beträgt das $\frac{7}{8}$fache des ursprünglichen Vermögens (der Unterschied zwischen dem $3\frac{3}{8}$fachen und $2\frac{1}{2}$fachen) 10500 M, also $\frac{1}{8}$ desselben 1500 M und das ganze anfängliche Vermögen 12000 M.

2) Übersichtlich dargestellt: Nennt man das anfängliche Kapital 1 Tl., so betrug das Kapital am Ende

des 1. Jahres $1\frac{1}{2} \cdot 1$ Tl. — 2000 M = $1\frac{1}{2}$ Tl. — 2000 M,
" 2. " $\frac{3}{2} \cdot (\frac{3}{2}$ Tl. — 2000) — 2000 M = $2\frac{1}{4}$ Tl. — 5000 M,
" 3. " $\frac{3}{2} \cdot (\frac{9}{4}$ Tl. — 5000) — 2000 M = $\frac{27}{8}$ Tl. — 9500 M.

Es ist also: $\frac{27}{8} - 9500$ M $= \frac{5}{2} + 1000$,

$\frac{7}{8} = 10500$, u. s. w.

8) Ein Stück Land, das 6540 ha enthält, soll unter 5 Gemeinden so verteilt werden, daß die Gemeinde B 340 ha mehr erhält, als die Gemeinde A, der Anteil der Gemeinde B sich zu dem der Gemeinde C wie 2 : 3 verhält, die Gemeinde D 260 ha weniger bekommt als der dreifache Anteil der Gemeinde B ausmacht und sich endlich der Anteil von C zu dem der Gemeinde E wie 3 : 4 verhält. Wieviel erhält jede Gemeinde?

Auflösung.

α) Algebraisch.

Der Anteil der Gemeinde A sei, in ha ausgedrückt x
Alsdann ist der Anteil der Gemeinde B . . . . $x + 340$
Und " " " " C: $(x + 340)\frac{3}{2} = \frac{3x + 1020}{2}$
" " " " " D: $(x + 340)3 - 260 = 3x + 760$
" " " " " E: $\frac{3x + 1020}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2x + 680$

Daher die Gleichung:

$$x + x + 340 + \frac{3x + 1020}{2} + 3x + 760 + 2x + 680 = 6540$$

Transp. u. zusammengefaßt: $\frac{17x}{2} = 4250.$

Nenner beseitigt: $17x = 8500$

x isoliert: $x = 500$ ha als Anteil d. Gemeinde A

Und $x + 340 = 840$ „ „ „ „ „ B

„ $\frac{3x + 1020}{2} = 1260$ „ „ „ „ „ C

„ $3x + 760 = 2260$ „ „ „ „ „ D

„ $2x + 680 = 1680$ „ „ „ „ „ E

β) Arithmetisch.

Die Gemeinde A bekomme, in ha ausgedrückt . . . . . 1 Tl.

Alsdann bekommt die Gemeinde B . . . . . . 1 Tl. + 340 ha

Und die Gemeinde C: (1 Tl. + 340 ha) · $\frac{3}{2}$ = $\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha

„ „ „ D: (1 Tl. + 340 ha) · 3 — 260 ha = 3 Tl. + 760 ha

„ „ „ E: ($\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha) · $\frac{4}{3}$ = 2 Tl. + 680 ha.

Mithin erhalten Gemeinde A + B + C + D + E = $8\frac{1}{2}$ Tl. + 2290 ha.

Demnach betragen $8\frac{1}{2}$ Tl. + 2290 ha = 6540 ha

Also $8\frac{1}{2}$ Tl. = 6540 — 2290 ha = 4250 ha.

Auf $\frac{1}{2}$ Tl. kommen also 4250 ha : 17 = 250 ha

Und auf 1 Tl. 2 · 250 = 500 ha

Gemeinde A erhält 1 Tl. = 500 ha

„ B „ 1 Tl. + 340 ha = 840 ha

„ C „ $\frac{3}{2}$ Tl. + 510 ha = 1260 ha

„ D „ 3 Tl. + 760 ha = 2260 ha

„ E „ 2 Tl. + 680 ha = 1680 ha.

9) Fünf Erben teilen sich in eine Hinterlassenschaft auf folgende Weise: A bekommt 2000 ℳ mehr als $\frac{1}{6}$ des ganzen Vermögens; B 1500 ℳ mehr, als $\frac{3}{4}$ des Anteils von A; C halb so viel als A und B zusammen, weniger 500 ℳ; D $\frac{3}{5}$ vom Reste weniger 200 ℳ und E den Rest im Betrage von 19000 ℳ. Wie groß war das Vermögen?

Auflösung.

α) Algebraisch.

1) Ist die zu teilende Hinterlassenschaft x ℳ, so bekommt hievon:

A: $\frac{1}{6} \cdot x + 2000$ ℳ $= \frac{x}{6} + 2000$ ℳ.

$$B: \frac{3}{4}\left(\frac{x}{6} + 2000\right) + 1500 = \frac{x}{8} + 3000.$$

$$C: \frac{1}{2}\left(\frac{x}{6} + 2000 + \frac{x}{8} + 3000\right) — 500 = \frac{7x}{48} + 2000.$$

Der nunmehrige Rest beträgt: $x — \left(\frac{x}{6} + 2000 + \frac{x}{8} + 3000 + \frac{7x}{48} + 2000\right) = \frac{27x}{48} — 7000 = \frac{9x}{16} — 7000.$

D bekommt also: $\frac{3}{5}\left(\frac{9x}{16} — 7000\right) — 200 = \frac{27x}{80} — 4400.$

Nun beträgt der Rest:

$$\frac{27x}{48} — 7000 — \left(\frac{27x}{80} — 4400\right) = \frac{54x}{240} — 2600 = \frac{9x}{40} + 2600.$$

Da dieser 19000 ℳ beträgt, so hat man die Gleichung:

$$\frac{9x}{40} — 2600 = 19000$$

$$\frac{9x}{40} = 21600$$

$$x = \mathbf{96000}.$$

2) Da E nach der Aufgabe 19000 ℳ erhält, so kann die Gleichung auch heißen:

$$x = \frac{x}{6} + 2000 + \frac{x}{8} + 3000 + \frac{7x}{48} + 2000 + \frac{27x}{80} — 4400 + 19000$$

$$x = 96000.$$

β) Arithmetisch.

1) Nennt man das ganze zu teilende Vermögen 1 Tl., so erhält:

A: $\frac{1}{6} \cdot 1$ Tl. + 2000 ℳ = $\frac{1}{6}$ Tl. + 2000 ℳ.

B: $\frac{3}{4}$ ($\frac{1}{6}$ Tl. + 2000 ℳ) + 1500 ℳ = $\frac{1}{8}$ Tl. + 3000 ℳ.

C: $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{6}$ Tl. + 2000 ℳ + $\frac{1}{8}$ Tl. + 3000 ℳ) — 500 ℳ = $\frac{7}{48}$ Tl. + 2000 ℳ.

Der nunmehrige Rest beträgt:

1 Tl. – ($\frac{1}{6}$ Tl. + 2000 + $\frac{1}{8}$ Tl. + 3000 ℳ + $\frac{7}{48}$ Tl. + 2000 ℳ) = $\frac{27}{48}$ Tl. — 7000 ℳ.

D bekommt demnach:

$\frac{3}{5}$ ($\frac{27}{48}$ Tl. — 7000) — 200 ℳ = $\frac{27}{80}$ Tl. — 4400 ℳ.

Nun beträgt der Rest:

$\frac{27}{48}$ Tl. — 7000 ℳ — ($\frac{27}{80}$ Tl. — 4400 ℳ) = $\frac{135}{240}$ Tl. — 7000 ℳ — $\frac{81}{240}$ Tl. + 4400 ℳ = $\frac{9}{40}$ Tl. — 2600 ℳ.

Daher: $\frac{9}{40}$ Tl. — 2600 ℳ = 19000 ℳ.

$\frac{9}{40}$ Tl. = 21600 ℳ.

$\frac{1}{40}$ Tl. = 2400 ℳ.

1 Tl. = 96000 ℳ.

2) Nimmt man das zu teilende Vermögen als 24 Tl. an, so erhält A: 4 Tl. + 2000 ℳ, B: 3 Tl. + 3000 ℳ, C: $3\frac{1}{2}$ Tl. + 2000 ℳ u. s. w.

3) Ebenso könnte man das zu teilende Vermögen etwa als 120 Tl. ansehen u. s. w.

10) Ein Ökonom besaß eine gewisse Anzahl ha Wiesen und vertauschte $\frac{1}{3}$ derselben gegen Weinberg, $\frac{1}{5}$ derselben gegen Waldungen und $\frac{1}{7}$ gegen Ackerland. Nach diesem Tausche war er im ganzen im Besitze von 944 ha Land. Wieviel ha Wiesen besaß der Ökonom vor dem Tausche, wenn 5 ha Wiesen denselben Wert wie 2 ha Weinberg, 6 ha Weinberg denselben Wert wie 35 ha Wald und 5 ha Wald denselben Wert wie 3 ha Ackerland haben?

Auflösung.

a) Algebraisch.

Angenommen, der Ökonom besaß x ha Wiesen; alsdann vertauschte er $\frac{71}{105}$x ha und behielt $\frac{34}{105}$ ha Wiesenland.

Für $\frac{1}{3}x$ ha Wiesen erhielt er $\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{3}$ ha Weinberg,

" $\frac{1}{5}x$ " " " " $\frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{5}$ ha Waldungen,

" $\frac{1}{7}x$ " " " " $\frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{7}$ ha Ackerland.

Diese Anzahl ha betragen mit dem Reste Wiesenland 944 ha. Daher die Gleichung:

$$\frac{34x}{105} + \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{3} + \frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{7} = 944$$

$$\frac{34x}{105} + \frac{2x}{15} + \frac{7x}{15} + \frac{x}{5} = 944$$

$$\frac{118x}{105} = 944$$

$$\frac{x}{105} = 8$$

$$x = 840 \text{ ha.}$$

b) Arithmetisch.

1) Die Anzahl der ha Wiesenland, die der Ökonom besaß, sei 1 Tl.; er vertauschte mithin $\frac{71}{105}$ Tl. und behielt $\frac{34}{105}$ Tl. Wiesenland.

Da 5 ha Wiesen denselben Wert haben, wie 2 ha Weinberg, so erhielt der Ökonom für 1 ha Wiesen $\frac{2}{5}$ ha Weinberg und für $\frac{1}{3}$ Tl. ha Wiesen $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$ Tl. ha Weinberg $= \frac{2}{15}$ Tl. ha.

Für 1 ha Weinberg erhält er $\frac{35}{6}$ ha Wald, mithin für $\frac{1}{5}$ Tl. ha Wiesen, oder für $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$ Tl. ha Weinberg $\frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$ Tl. ha Wald $= \frac{7}{15}$ Tl. ha Wald.

Für 1 ha Wald erhält er $\frac{3}{5}$ ha Ackerland, mithin für $\frac{1}{7}$ Tl. ha Wiesen, oder $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7}$ Tl. ha Weinberg, oder $\frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7}$ Tl. Wald $\frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{7}$ Tl. Ackerland $= \frac{1}{5}$ Tl. Ackerland.

Diese $\frac{34}{105}$ Tl. ha Wiesen, $\frac{2}{15}$ Tl. ha Weinberg, $\frac{7}{15}$ ha Wald und $\frac{1}{5}$ Tl. ha Ackerland betragen zusammen 944 ha. Daher:

$$\frac{34}{105} \text{ Tl.} + \frac{2}{15} \text{ Tl.} + \frac{7}{15} \text{ Tl.} + \frac{1}{5} \text{ Tl.} = 944 \text{ ha}$$
$$\frac{118}{105} \text{ Tl.} = 944$$
$$\frac{1}{105} \text{ Tl.} = 8 \text{ ha}$$
$$1 \text{ Tl.} = \mathbf{840 \text{ ha}}.$$

2) Angenommen, er habe 105 ha Wiesen gehabt; dann hätte er 35 ha gegen Weinberg, 21 ha gegen Waldungen und 15 ha gegen Ackerland umgetauscht.

Für 35 ha Wiesen hätte er erhalten $\frac{2}{5} \cdot 35$ ha $= 14$ ha Weinberg.
„ 21 „ „ „ „ „ $\frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot 21$ ha $= 49$ ha Wald.
„ 15 „ „ „ „ „ $\frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot 15$ ha $= 21$ ha Acker.

Da er 34 ha Wiesen übrig gehabt hätte, so hätte er nach dem Tausche 14 ha + 49 ha + 21 ha + 34 ha = 118 ha Land gehabt.

Er hatte aber nach dem Tausche 944 ha Land, also 8 mal soviel; mithin hatte er auch vor dem Tausche 8 · 105 = 840 ha Wiesen.

11) Jemand bestimmt in seinem Testamente, daß sein Verwandter M den achten Teil seines hinterlassenen Vermögens und außerdem 1500 *M*, und sein Diener den zehnten Teil des Restes und 300 *M* bekommen soll. Der nunmehrige Rest soll der Volksschule, dem Waisenhause und dem Spitale seiner Vaterstadt zufallen, und zwar soll die erstere den fünften Teil des letzten Restes und 880 *M*, das Waisenhaus $\frac{3}{10}$ des jetzigen Restes und 1320 *M* und das Spital endlich den letzten Rest, der 23600 *M* beträgt, erhalten.

Wie groß ist das hinterlassene Vermögen und wieviel bekommt hievon der Verwandte, der Diener, die Volksschule und das Waisenhaus?

Auflösung (Algebraisch).

1) Angenommen, das hinterlassene Vermögen sei . . . . . x *M*

Der Verwandte erhält: $\frac{x}{8} + 1500 =$ . . . $\frac{x + 12000}{8}$.

Der Rest beträgt: $x - \frac{x + 12000}{8} = \frac{8x - x - 12000}{8} = \frac{7x - 12000}{8}$.

Der Diener bekommt: $\frac{7x - 12000}{8} \cdot \frac{1}{10} + 300 = \frac{7x - 12000}{80}$
$+ 300 = \frac{7x - 12000 + 24000}{80} = \frac{7x + 12000}{80}$.

Der nunmehrige Rest ist: $\frac{7x - 12000}{8} - \frac{7x + 12000}{80} =$
$\frac{70x - 120000 - 7x - 12000}{80} = \frac{63x - 132000}{80}$.

Der Volksschule fallen zu: $\frac{63x - 132000}{80} \cdot \frac{1}{5} + 880 = \frac{63x - 132000}{400}$
$+ 880 = \frac{63x - 132000 + 352000}{400} = \frac{63x + 220000}{400}$.

Der jetzige Rest beträgt: $\frac{63x - 132000}{80} - \frac{63x + 220000}{400} =$
$\frac{315x - 660000 - 63x - 220000}{400} = \frac{252x - 880000}{400} =$
$\frac{63x - 220000}{100}$.

Das Waisenhaus bekommt: $\frac{63x - 220000}{100} \cdot \frac{3}{10} + 1320 =$
$\frac{189x - 660000}{1000} + 1320 = \frac{189x - 660000 + 1320000}{1000} =$
$\frac{189x + 660000}{1000}$.

Der nunmehrige Rest ist: $\frac{63x - 220000}{100} - \frac{189x + 660000}{1000} =$
$\frac{630x - 2200000 - 189x - 660000}{1000} = \frac{441x - 2860000}{1000}$.

Da nun dieser Rest 23600 ℳ beträgt, so hat man

$$\frac{441x - 2860000}{1000} = 23600$$

Oder: $441x - 2860000 = 23600000$

" $441x = 26460000$

Mithin: $x = 60000$ ℳ als hinterlassenes Vermögen.

Hievon bekommt:

Der Verwandte: $\frac{x + 12000}{8} = 9000$ ℳ

Der Diener: $\frac{7x + 12000}{80} = 5400$ ℳ

Die Volksschule: $\frac{63x + 220000}{400} = 10000$ ℳ

Das Waisenhaus: $\frac{189x + 660000}{1000} = 12000$ ℳ

Und das Spital: 23600 ℳ.

2) Das hinterlassene Vermögen mit x ℳ bezeichnet, erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{7}{10}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{9}{10}(\tfrac{7}{8}x - 1500) - 300\right) - 880\right] - 1320 = 23600$$

Hieraus ist $x = 60000$ ℳ.

12) A bietet für ein Haus 4200 ℳ bar und 9296 ℳ nach 3 Jahren oder auch bar mit 4 % Rabatt auf 100. B bietet eine Summe, von welcher er die Hälfte nach 4 und den Rest nach 6 Jahren erlegen will; er ist aber bereit, falls man ihm 5 % Rabatt auf 100 gewährt, alles sogleich zu bezahlen. Beide Angebote sind gleich. Welche Summe bietet B an?

Auflösung.

a) Algebraisch.

Die Summe, welche B bietet, mit x ℳ bezeichnet, erhält man nach den Bedingungen der Aufgabe die folgende Gleichung:

$$4200 + \frac{9296 \cdot 100}{112} = \frac{x \cdot 100}{2 \cdot 120} + \frac{x \cdot 100}{2 \cdot 130}$$

$$4200 + 8300 = \frac{5x}{12} + \frac{5x}{13}$$

$$\frac{5x}{12} + \frac{5x}{13} = 12500$$

$$65x + 60x = 1950000$$
$$125x = 1950000$$
$$x = \mathbf{15600}\ ℳ.$$

Erläuterung. 100 ℳ wachsen in 3 Jahren zu 4 % auf 112 ℳ an. Der Barwert von 112 nach 3 Jahren zu zahlenden Mark bei 4 % Rabatt auf 100 ist also 100 ℳ, und der Barwert von 9296 ℳ ist demnach so oftmal 100 ℳ als 112 in 9296 ℳ enthalten ist, u. s. w.

b) Arithmetisch.

Der Barwert des Angebots des A ist:

$$4200 + \frac{9296 \cdot 100}{112} = 12500\ ℳ.$$

So groß ist auch der Barwert des Angebots des B.

Nun beträgt aber der bare Wert der nach 4 Jahren zu zahlenden Hälfte seines Angebots:

$$\frac{1 \cdot 100}{2 \cdot 120} = \frac{5}{12} \text{ des ganzen Angebots und}$$

der bare Wert der nach 6 Jahren zu zahlenden Hälfte:

$$\frac{1 \cdot 100}{2 \cdot 130} = \frac{5}{13} \text{ des Ganzen.}$$

Es betragen also $\frac{5}{12} + \frac{5}{13}$ des Angebots des B = 12500 ℳ oder:

$$\frac{65 + 60}{156} \text{ betragen } 12500\ ℳ.$$

Mithin ist das Angebot:

$$\frac{12500 \cdot 156}{125} = \mathbf{15600}\ ℳ.$$

13) Jemand kauft ein Haus für 20500 ℳ und hat diese Summe nach 1 Jahre zu zahlen. Nach 3 Monaten jedoch trägt der Käufer schon 2500 ℳ ab und erbietet sich, nach dieser Zeit in 4 gleichen Terminen jedesmal 4500 ℳ zu zahlen. In welchen Terminen müssen diese Teilzahlungen erfolgen?

Auflösung.

a) Algebraisch.

1) Bezeichnet man einen der vier gleichen Termine, nach welchen die gleichen Posten abgetragen werden sollen, mit x Monaten, so ergibt sich, da die erste Zahlung von 2500 ℳ nach 3 Monaten erfolgt, die erste Terminzahlung also nach (3 + x) Monaten, die folgende Gleichung:

$$2500 \cdot 3 + 4500(3 + x) + 4500(3 + 2x) + 4500(3 + 3x) + 4500(3 + 4x) = 20500 \cdot 12$$

oder: $7500 + 4500(12 + 10x) = 246000$

„ $7500 + 54000 + 45000x = 246000$

oder: $45000x = 184500$

„ $450x = 1845$

„ $x = 4\frac{1}{10}$ Monat.

2) Bezeichnet x wieder die Dauer eines Termins in Monaten, so läßt sich die Gleichung auch so bilden:

$$20500 \cdot 3 + 4500 \cdot x + 4500 \cdot 2x + 4500 \cdot 3x + 4500 \cdot 4x = 20500 \cdot 12$$

$$61500 + 4500 \cdot 10x = 246000$$

$$45000x = 184500$$

$$x = 4\tfrac{1}{10}.$$

b) Arithmetisch.

Der Käufer darf benützen: 20500 ℳ 12 Monate lang, oder 100 ℳ 205 · 12 Monate = 2460 Mt. Thatsächlich benützt er zunächst 20500 ℳ 3 Monate lang oder 100 ℳ 205 · 3 Mt. = 615 Mt. Mithin darf er noch 100 ℳ 2460 — 615 = 1845 Monate benützen.

Nun benützt er ferner bis zum ersten Termine, da er nach 3 Monaten bereits 2500 ℳ abträgt: 20500 ℳ — 2500 ℳ = 18000 ℳ, also bis zum 1ten Termine 4 · 4500 ℳ,
„ „ 2ten „ 3 · 4500 ℳ,
„ „ 3ten „ 2 · 4500 ℳ, und
„ „ 4ten „ 1 · 4500 ℳ, also
im ganzen 10 · 4500 ℳ.

Darf nun der Käufer 100 ℳ 1845 Monate lang benützen, so kann er 4500 ℳ 41 Monate lang und 10 · 4500 ℳ nur $4\frac{1}{10}$ Monate lang benützen. Mithin betragen die einzelnen Termine $4\frac{1}{10}$ Monate.

14) Vier Personen betrieben gemeinsam ein Geschäft. B gab 600 ℳ weniger dazu als A, C $\frac{2}{3}$ mal soviel als B und D 900 ℳ. Von dem Gewinne, der 1938 ℳ betrug, erhielt B 547,20 ℳ. Wieviel hatte jede Person eingelegt und wieviel gewann jede, wenn A sein Geld 7 Monate, B 8 Monate, C 9 Monate und D 10 Monate im Geschäfte ließ?

Auflösung.

a) Algebraisch.

Angenommen, die Einlage des A sei x ℳ, die des B ist alsdann

$x - 600$ ℳ, die des C $(x - 600)\,\frac{2}{3} = \frac{2x}{3} - 400$ und die des D beträgt 900 ℳ.

x ℳ	bringen in 7 Monaten soviel Gew. als	7x ℳ	in 1 Mt.
x — 600 ℳ	„ „ 8 „ „ „ „ „	8x — 4800 ℳ	„ „ „
$\frac{2}{3}$x — 400 ℳ	„ „ 9 „ „ „ „ „	6x — 3600 ℳ	„ „ „
900 ℳ	„ „ 10 „ „ „ „ „	9000 ℳ	„ „ „.

Demnach ist der Gewinn von 1938 ℳ zu teilen im Verhältnisse von $7x : (8x - 4800) : (6x - 3600) : 9000$. Nun wird eine Zahl nach einem gegebenen Verhältnisse geteilt, indem man dieselbe durch die Summe der Verhältnisteile dividiert, d. i. hier durch $21x + 600$, und den erhaltenen Quotienten mit den einzelnen Verhältnisteilen multipliciert. Da in der Aufgabe der Gewinn des B gegeben ist, so ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{1938}{21x + 600} \cdot (8x - 4800) = 547{,}20$$

$$15504x - 9302400 = 11491{,}2x + 328320$$

$$4012{,}8x = 9630720$$

$$x = 2400 \text{ ℳ als Einlage des A.}$$

Mithin ist $x - 600$ ℳ $= 1800$ ℳ die Einlage des B
$\frac{2}{3}x - 400$ ℳ $= 1200$ „ „ „ „ C
Und 900 „ „ „ „ D.

Nennt man den Gewinn von 100 ℳ in 1 Monat y, so erhält:

A $24 \cdot 7 = 168y$ ℳ
B $18 \cdot 8 = 144y$ „
C $12 \cdot 9 = 108y$ „
D $9 \cdot 10 = 90y$ „.

Demnach ist: $168y + 144y + 108y + 90y = 1938$
Oder: $510y = 1938$
$y = 3{,}8$ ℳ.

Also erhält A $168 \cdot 3{,}8$ ℳ $= 638{,}40$ ℳ Gewinn
B $144 \cdot 3{,}8$ „ $= 547{,}20$ „ „
C $108 \cdot 3{,}8$ „ $= 410{,}40$ „ „
D $90 \cdot 3{,}8$ „ $= 342$ „ „.

b) Arithmetisch.

1) Bezeichnet man die Einlage des A als 1 Tl., so hat B eingelegt 1 Tl. — 600 ℳ, C $\frac{2}{3}$ Tl. — 400 ℳ und D 900 ℳ.

1 Tl.	in 7 Mt. bringt dens. Gewinn als	7 Tl.		in 1 Mt.
1 Tl. — 600 ℳ	„ 8 „ „ „ „ „	8 Tl. — 4800 ℳ	„ „ „	
$\frac{2}{3}$ Tl. — 400 „	„ 9 „ „ „ „ „	6 Tl. — 3600 „	„ „ „	
900 „	„ 10 „ bringen „ „ „	9000 „	„ „ „.	

Die auf 1 Mt. reduzierte Einlage beträgt also 21 Tl. + 600 ℳ. Vom Gewinne erhält B 547,20 ℳ. Man gewinnt also:

	Mit 21 Tl. + 600 ℳ in 1 Mt.	1938 ℳ,	und B
	„ 8 Tl. — 4800 „ „ „ „	547,20 ℳ	
Oder:	„ 168 Tl. + 4800 „ „ „ „	15504 „	
„	„ 168 Tl. —100800 „ „ „ „	11491,2 ℳ	
	Also gewinnt B mit 105600 „ „ „ „	4012,8 „.	

Mit 100 ℳ gewinnt B also 4012,8 : 1056 ℳ = 3,8 ℳ. Folglich gewinnt er mit 100 ℳ in 8 Monaten 8 · 3,8 ℳ = 30,4 ℳ. Seine Einlage muß also sovielmal 100 ℳ sein als 30,4 in 547,2 ℳ enthalten sind, nämlich 18 · 100 = **1800** ℳ, u. s. w.

2) B erhält **547,20** ℳ Gewinn. Da C $\frac{2}{3}$ mal soviel gegeben hat als B, so müßte sein Gewinnanteil in derselben Zeit $\frac{2}{3}$ · 547,20 ℳ = 2 · 182,4 = 364,8 ℳ betragen. Er läßt aber sein Geld $\frac{9}{8}$ mal so lange stehen als B, folglich muß sein Gewinn auch $\frac{9}{8}$ · 364,8 ℳ = 9 · 45,6 ℳ = **410,40** ℳ betragen. Wäre das Kapital des A gleich dem des B, so würde er in 7 Monaten $\frac{7}{8}$ · 547,20 ℳ = 7 · 68,40 ℳ = 478,80 ℳ Gewinn erhalten. Er muß aber außerdem noch einen Teil des Gewinnes bekommen, da er 600 ℳ mehr als B gibt. Außerdem muß auch D seinen Gewinnanteil erhalten.

Erhält B 547,20 ℳ, C 410,40 ℳ und A 478,80 ℳ Gewinn, so bleibt noch vom ganzen Gewinne übrig 1938 — 1436,40 ℳ = 501,60 ℳ.

Diese kommen auf die 600 ℳ des A, die er mehr als B gibt, und die 900 ℳ des D. 600 ℳ geben in 7 Monaten soviel Gewinn als 100 ℳ in 42 Monaten, und 900 ℳ in 10 Monaten soviel als 100 ℳ in 90 Monaten. Demnach sind diese 501,60 ℳ in 90 + 42 = 132 gleiche Teile zu zerlegen. Auf 1 Tl. kommen mithin 3,8 ℳ und auf 42 Tl. des A 42 · 3,8 ℳ = 159,6 ℳ. A erhält also im ganzen 478,80 ℳ + 159,60 ℳ = **638,40** ℳ, und D 90 · 3,8 ℳ = **342** ℳ.

Die **900** ℳ des D bringen in 10 Monaten 342 ℳ Gewinn; das Kapital des C würde in 10 Monaten $\frac{10}{9}$ · 410,40 ℳ =

$10 \cdot 45{,}6$ ℳ $= 456$ ℳ, d. i. $\frac{4}{3}$ mal soviel bringen; mithin ist es auch $\frac{4}{3}$ mal so groß, d. i. $\frac{4}{3} \cdot 900$ ℳ $=$ **1200** ℳ. B gab $\frac{3}{2} \cdot 1200$ ℳ $=$ **1800** ℳ und A $1800 + 600$ ℳ $=$ **2400** ℳ.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl., §. 32.

II. Mit mehreren Unbekannten.

§. 44. Auflösung gegebener Gleichungen.

Zur Bestimmung mehrerer unbekannter Zahlen sind so viele von einander unabhängige [1]) Bestimmungsgleichungen erforderlich, als unbekannte Zahlen vorhanden sind. Die Unbekannten werden gefunden, indem man sie nach einander aus den Gleichungen wegschafft (eliminiert). Auf diese Weise erhält man aus n Gleichungen mit n Unbekannten $(n - 1)$ Gleichungen mit $(n - 1)$ Unbekannten, aus $(n - 1)$ Gleichungen mit $(n - 1)$ Unbekannten $(n - 2)$ Gleichungen mit $(n - 2)$ Unbekannten u. s. w. abwärts bis zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Je nach dem Verfahren, das man einschlägt, um die Endgleichung zu erhalten, unterscheidet man vier Auflösungs- oder Eliminationsmethoden, die im nachfolgenden entwickelt werden sollen.

a) Die Substitutionsmethode.

1) Um das Wesen dieser Methode zu erkennen, bedenke man zunächst folgendes. Jede der zwei Unbekannten muß in den beiden Gleichungen:

$$1)\quad 4x + 3y = 31$$
$$2)\quad 5x - 2y = 10$$

denselben Wert haben. Löst man nun eine dieser zwei Gleichungen für die eine der beiden Unbekannten, z. B. für x, auf und setzt den hiefür erhaltenen Zahlenausdruck in die andere Gleichung anstatt x ein (substituiert den Wert für x), so muß x aus dieser Gleichung eliminiert werden und man muß zugleich eine Gleichung mit nur einer Unbekannten erhalten. Also:

---

1) Damit aus mehreren Gleichungen bestimmte Werte der Unbekannten hervorgehen, ist es nötig, daß diese Gleichungen von einander unabhängig sind, d. h. nicht durch bloße Umformungen aus einander hervorgehen können. So sind z. B. die Gleichungen:

$$3x + 2y = 25$$
$$6x + 4y = 50$$

von einander abhängig, weil die 2te aus der 1ten durch Multiplikation mit 2 entsteht.

Aus 1) ist $x = \frac{31 - 3y}{4}$. Diesen Wert für x in Gleichung 2) substituiert, kommt:

$$3)\ 5 \cdot \frac{31 - 3y}{4} - 2y = 10$$

Oder $155 - 15y - 8y = 40$

" $- 23y = - 115$

" $23y = 115$

Und hieraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

Setzt man diesen für y gefundenen Wert in eine der gegebenen Gleichungen, z. B. in die erste, für y, so erhält man:

$$4x + 15 = 31$$

Und hieraus $x = 4.$

2) Sind 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gegeben, so entwickelt man aus einer derselben eine der 3 Unbekannten und setzt diesen Wert statt dieser Unbekannten in die zwei andern Gleichungen. Hiedurch erhält man zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten. Wendet man auf diese das im 1. Beispiele gezeigte Verfahren an, so gelangt man schließlich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Also:

$$1)\ 4x + 3y + 6z = 41$$
$$2)\ 5x - 2y + z = 8$$
$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}$.

Diesen Wert in 1) substituiert, kommt:

$$4 \cdot \frac{12 + 4y - 5z}{2} + 3y + 6z = 41$$

Oder $48 + 16y - 20z + 6y + 12z = 82$

" $22y - 8z = 34.$

" $4)\ \mathbf{11y - 4z = 17.}$

Den Wert von x in 2) substituiert, erhält man:

$$5 \cdot \frac{12 + 4y - 5z}{2} - 2y + z = 8,$$

Oder $60 + 20y - 25z - 4y + 2z = 16$

" $5)\ \mathbf{16y - 23z = - 44.}$

Aus 5) ist $y = \frac{23z - 44}{16}$.

Diesen Wert für y in 4) substituiert, erhält man:

$$11 \cdot \frac{23z - 44}{16} - 4z = 17.$$

Oder $$253z - 484 - 64z = 272$$

" $$189z = 756.$$

Und hieraus $$z = \tfrac{756}{189} = \mathbf{4}.$$

Setzt man diesen Wert für z in 4), so erhält man:

$$11y - 16 = 17.$$

Oder $$11y = 33$$

Und daraus $$y = \tfrac{33}{11} = \mathbf{3}.$$

Trägt man endlich diese beiden Werte etwa in 1) ein, so ergibt sich:

$$4x + 9 + 24 = 41$$

Oder $$4x = 8$$

Und daraus $$x = \mathbf{2}.$$

Es ist kaum zu bemerken nötig, daß die soeben entwickelte Auflösungsmethode auch dann anwendbar ist, wenn 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten, 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten u. s. w. gegeben sind. Das Verfahren, Gleichungen nach der Substitutionsmethode aufzulösen, läßt sich folgendermaßen kurz und bündig zusammenfassen:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so bestimmt man aus einer der n Gleichungen eine Unbekannte und substituiert deren Wert für diese Unbekannte in jede der übrigen (n — 1) Gleichungen. Hiedurch wird in diesen e i n e Unbekannte eliminiert, so daß man (n — 1) Gleichungen mit höchstens (n — 1) Unbekannten erhält. Eine dieser (n — 1) Gleichungen löst man hierauf für eine zweite Unbekannte auf und trägt deren Wert in die noch vorhandenen (n — 2) Gleichungen ein, wodurch sich (n — 2) Gleichungen mit höchstens (n — 2) Unbekannten ergeben. Dieses Verfahren wird solange fortgesetzt, bis man bei e i n e r Gleichung mit e i n e r Unbekannten angelangt ist, aus der man in der bekannten Weise diese ermittelt. Die übrigen Unbekannten werden aus den vorhergehenden Gleichungen durch Substitution gefunden.

b) Die Komparations= oder Kombinationsmethode [1]).

1) Es sind die zwei Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$

$$2)\ 5x - 2y = 10$$

---

1) Kombination, lat. combinatio, f., Verbindung oder Verknüpfung von zwei Dingen, von combināre, paarweise verbinden. Diese Methode wird auch Gleichsetzungs= und Reduktionsmethode genannt.

nach dieser Methode aufzulösen. Da x und y in den beiden Gleichungen beziehlich denselben Wert haben, so müssen auch die Zahlenausdrücke, die man etwa für x aus den zwei Gleichungen erhält, wenn man dieselben auf diese Unbekannte reduciert, notwendig einander gleich sein. Bildet man daher aus den für x erhaltenen Werten eine Gleichung, so wird damit x offenbar eliminiert, indem diese neue Gleichung nur noch y enthält. Demnach:

Aus 1) ist $x = \frac{31 - 3y}{4}$.

„ 2) ist $x = \frac{10 + 2y}{5}$.

Also ist 3) $\frac{31 - 3y}{4} = \frac{10 + 2y}{5}$.

Oder $155 - 15y = 40 + 8y$,

„ $-23y = -115$,

„ $23y = 115$,

Und daraus $y = \frac{115}{23} = 5$.

x wird bestimmt, indem man den Wert von y aus 1) und 2) bestimmt und beide Werte einander gleich setzt. Man erhält so $x = 4$.

2) 1) $4x + 3y + 6z = 41$.
2) $5x - 2y + z = 8$.
3) $2x - 4y + 6z = 12$.

Man löst zunächst jede Gleichung für eine und dieselbe Unbekannte, z. B. für x, auf

Aus 1) ist $x = \frac{41 - 3y - 6z}{4}$.

Aus 2) ist $x = \frac{8 + 2y - z}{5}$.

Aus 3) ist $x = \frac{12 + 4y - 5z}{2}$.

Aus diesen für x erhaltenen Werten bildet man nun zwei Gleichungen, was dadurch geschehen kann, daß man etwa den ersten Wert dem zweiten und den ersten dem dritten gleichsetzt (oder wie?). Hiedurch erhält man, indem man Wert 1) und 2) einander gleichsetzt:

$$\frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{8 + 2y - z}{5},$$

Oder $205 - 15y - 30z = 32 + 8y - 4z$,

$-23y - 26z = -173$,

4) $\mathbf{23y + 26z = 173}$.

Bildet man nun auch aus Wert 1) und Wert 3) eine Gleichung, so folgt:

$$\frac{41 - 3y - 6z}{4} = \frac{12 + 4y - 5z}{2},$$

Oder $41 - 3y - 6z = 24 + 8y - 10z,$

" 5) $- \mathbf{11y} + \mathbf{4z} = - \mathbf{17}.$

Aus 4) ist $z = \frac{173 - 23y}{26}.$

Aus 5) ist $z = \frac{- 17 + 11y}{4}.$

Folglich: $\frac{173 - 23y}{26} = \frac{- 17 + 11y}{4},$

Oder $346 - 46y = - 221 + 143y,$

" $- 189y = - 567,$

" $189y = 567,$

Und daraus $y = \frac{567}{189} = 3.$

x und z werden auf ähnliche Weise gefunden.

In vorstehenden 2 Beispielen ist das Wesen der Komparationsmethode auseinandergesetzt worden. Überblickt man dasselbe, so findet man, daß es in folgendem besteht:

Man bestimmt aus allen gegebenen n Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte und setzt je 2 der erhaltenen Werte einander gleich. Hiedurch erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Reduciert man hierauf alle (n — 1) Gleichungen wieder auf eine und dieselbe Unbekannte und kombiniert je zwei der gefundenen Werte zu Gleichungen, so resultieren (n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten. Diese Operation setzt man so lange fort, bis sich schließlich eine Gleichung mit einer Unbekannten ergibt, deren Wert bestimmt wird. Auf ähnliche Weise sucht man die anderen Unbekannten.

c) Die Additions- und Subtraktions-, oder Aggregations-, oder Koëfficienten-Methode (auch englische Methode oder Eliminationsmethode im engern Sinne genannt).

1) Es seien die beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x + 3y = 31$$

$$2)\ 5x - 2y = 10$$

zur Auflösung nach dieser Methode vorgelegt. Die Werte für x und y in diesen beiden Gleichungen werden bekanntlich nicht verändert, wenn man alle Glieder beider Gleichungen mit einer und derselben Zahl

multipliciert. In dieser Eigenschaft der Gleichungen ist uns ein Mittel an die Hand gegeben, den zu eliminierenden Unbekannten in beiden Gleichungen denselben Koëfficienten zu verschaffen. Multipliciert man beispielsweise Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3, so erhält man:

$$3)\quad 8x + 6y = 62.$$

$$4)\quad 15x - 6y = 30.$$

Es ist nun einleuchtend, daß die Glieder, welche y enthalten, durch Addition der beiden Gleichungen 3) und 4) verschwinden, die Unbekannte y also hiedurch aus beiden Gleichungen eliminiert wird; denn führt man diese Addition aus, so folgt:

$$5)\quad 23x = 92$$

Und daraus $x = \frac{92}{23} = 4.$

Hätte man, zum Zwecke der Elimination von x aus beiden Gleichungen, Gleichung 1) mit 5, Gleichung 2) mit 4 multipliciert, so würde man erhalten haben:

$$3)\quad 20x + 15y = 155.$$

$$4)\quad 20x - 8y = 40.$$

Auf den ersten Blick ist ersichtlich, daß hier die Addition beider Gleichungen zu einander eine Elimination der Unbekannten x nicht zur Folge hat. Subtrahiert man aber Gleichung 4) algebraisch von Gleichung 3), so resultiert:

$$5)\quad 23y = 115$$

Und daraus $y = \frac{115}{23} = 5.$

2) 1) $4x + 3y + 6z = 41$

2) $5x - 2y + z = 8$

3) $2x - 4y + 5z = 12.$

Um y zu eliminieren, multipliciert man zunächst Gleichung 1) mit 2 und Gleichung 2) mit 3 und addiert beide Gleichungen zu einander, also:

$$4)\quad 8x + 6y + 12z = 82.$$

$$5)\quad 15x - 6y + 3z = 24.$$

Durch Addition beider erhält man:

$$6)\quad 23x + 15z = 106.$$

Hierauf multipliciert man Gleichung 2) mit 2 und Gleichung 3) mit 1, wodurch sich ergibt:

$$7)\quad 10x - 4y + 2z = 16.$$

$$8)\quad 2x - 4y + 5z = 12.$$

Subtrahiert man Gleichung 8) von Gleichung 7), so kommt:

$$9)\quad 8x - 3z = 4.$$

Die 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten heißen also:

6) $23x + 15z = 106.$

9) $8x - 3z = 4.$

Um z zu eliminieren, multipliciert man Gleichung 6) mit 1 und Gleichung 9) mit 5, so daß man erhält:

10) $23x + 15z = 106.$

11) $40x - 15z = 20.$

Beide Gleichungen addiert, erhält man:

12) $63x = 126$

Und daraus $x = \frac{126}{63} = 2.$

In ähnlicher Weise sucht man den Wert von y und z.

Diese zwei Beispiele werden genügen, um eine klare Einsicht in das Wesen der Koëfficienten-Methode zu verschaffen. Kurz und bündig zusammengefaßt, läßt es sich folgendermaßen formulieren:

Sind n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so eliminiert man aus je 2 Gleichungen eine und dieselbe Unbekannte, nachdem man ihr in beiden Gleichungen durch geeignete Multiplikation denselben Koëfficienten verschafft hat (wofern sie nicht von vorne herein den gleichen hat), durch Addition oder Subtraktion — durch Addition, wenn die Vorzeichen der zu eliminierenden Glieder entgegengesetzt, durch Subtraktion, wenn sie gleich sind. Auf diese Weise erhält man (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten. Diese (n — 1) Gleichungen unterwirft man demselben Verfahren, wie die n Gleichungen und setzt es so lange fort, bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt, deren Wert man bestimmt. Die übrigen Unbekannten findet man auf ähnliche Weise.

d) Die Bézout'sche oder französische Methode[1]).

1) Es sei die Aufgabe gestellt, die Werte der 2 Unbekannten folgender zwei Gleichungen:

1) $4x + 3y = 31$

2) $5x - 2y = 10$

nach dieser Methode zu bestimmen. Eliminieren wir zunächst x aus beiden Gleichungen. Im vorigen Beispiele wurde schon gesagt, daß sich der Wert der Unbekannten nicht ändert, wenn man sämtliche Glieder einer Gleichung mit einer und derselben Zahl multipliciert. Wenden wir

1) Diese Methode rührt von dem französischen Mathematiker Bézout (spr. Bēsū) her.

diesen Satz auf Gleichung 1) an und multiplicieren sie etwa mit der unbestimmten Zahl a, so folgt:

$$3)\ 4ax + 3ay = 31a.$$

Addiert man nun Gleichung 2) zu Gleichung 3), so ergibt sich die eine Gleichung:

$$4)\ 5x + 4ax - 2y + 3ay = 10 + 31a.$$

Oder, indem man die Unbekannten heraustrennt:

$$x(5 + 4a) + y(3a - 2) = 10 + 31a.$$

Da nun x eliminiert werden soll, so muß das Glied x(5 + 4a) Null werden, d. h. es muß der Koëfficient dieses Gliedes, nämlich 5 + 4a, Null werden. Es ist nun leicht ersichtlich, daß er dies wird, wenn man der neu eingeführten und bis jetzt unbestimmt gebliebenen Zahl a den Wert $-\frac{5}{4}$ beilegt. Dieser wird übrigens leichter noch gefunden, wenn man setzt:

$$5 + 4a = 0$$

Denn hieraus folgt zunächst:

$$4a = -5$$

Und daraus $a = -\frac{5}{4}.$

Die Substitution dieses Wertes in die Gleichung 4) liefert:

$$5)\ x(5 - 5) + y(-\tfrac{15}{4} - 2) = 10 - \tfrac{155}{4}$$

Oder $-\frac{23y}{4} = -\frac{115}{4}$

" $23y = 115$

Und daraus $y = 5$

In ähnlicher Weise $x = 4.$

$$2)\ 1)\ 4x + 3y + 6z = 41.$$

$$2)\ 5x - 2y + z = 8.$$

$$3)\ 2x - 4y + 5z = 12.$$

Man multipliciert 2) mit a und 3) mit b, also:

$$4)\ 5ax - 2ay + az = 8a$$

$$5)\ 2bx - 4by + 5bz = 12b.$$

Die Summation der 3 Gleichungen 1), 4) und 5) liefert:

$$6)\ (4 + 5a + 2b)x + (3 - 2a - 4b)y + (6 + a + 5b)z = 41 + 8a + 12b.$$

Sollen nun x und y zum Wegfallen gebracht werden, so müssen die Glieder:

$$(4 + 5a + 2b)x \text{ und}$$
$$(3 - 2a - 4b)y$$

gleich Null werden, d. h. die Koëfficienten $(4 + 5a + 2b)$ und $(3 - 2a - 4b)$. Um nun die Werte für a und b zu finden, die dies bewirken, setzen wir, wie schon im vorhergehenden Beispiele gezeigt wurde:

$$4 + 5a + 2b = 0$$

Oder $\quad \text{I} \quad 5a + 2b = -4$

Und $\quad 3 - 2a - 4b = 0$

Oder $\quad \text{II} \quad -2a - 4b = -3.$

I mit 2 und II mit 1 multipliciert, erhält man:

$$\text{III} \quad 10a + 4b = -8$$

$$\text{IV} \quad -2a - 4b = -3.$$

Das Resultat der Addition beider ist:

$$\text{V} \quad 8a = -11$$

Und daraus $\quad a = -\frac{11}{8}.$

Die Substitution dieses Wertes in III gibt:

$$\text{VI} \quad -\frac{110}{8} + 4b = -8$$

Oder $\quad 4b = \frac{46}{8}$

Und daraus $\quad b = \frac{46}{32} = \frac{23}{16}.$

Substituiert man nun diese für a und b gefundenen Werte in die Gleichung 6), so erhält man die Gleichung:

$$7) \quad \left(4 - \frac{55}{8} - \frac{46}{16}\right)x + \left(3 + \frac{22}{8} - \frac{23}{4}\right)y +$$
$$\left(6 - \frac{11}{9} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - \frac{88}{8} + \frac{69}{4}$$

Oder $\quad \left(6 - \frac{11}{8} + \frac{115}{16}\right)z = 41 - 11 + \frac{69}{4}$

" $\quad \frac{189}{16}z = \frac{756}{16}$

" $\quad 189z = 756$

Und daraus $\quad z = \frac{756}{189} = 4.$

In ähnlicher Weise wird x und y gefunden.

In den vorstehenden zwei Beispielen wurde versucht, das Wesen der Bézout'schen Methode deutlich darzulegen. Resumieren wir dasselbe.

Sind n Gleichungen gegeben, so multipliciert man alle bis auf eine mit je einem beliebigen Buchstaben und addiert hierauf sämtliche Gleichungen. In der so erhaltenen Gleichung setzt man sodann die Koëfficienten von $(n - 1)$ Unbekannten gleich Null und bestimmt aus diesen auf Null gebrachten Gleichungen die Werte von den eingeführten Buchstaben. Diese trägt man endlich in die Summengleichung ein, wodurch man eine Gleichung mit einer Unbekannten erhält, deren Wert bestimmt wird. Die Werte der andern Unbekannten können auf ähnliche Weise gefunden werden [1]).

1) Außer den vorstehend erörterten Methoden zur Auflösung von Gleichungen

Zusatz. Welche Methode für die Elimination von Unbekannten am schnellsten und bequemsten zum Ziele führt, hängt von der Beschaffenheit der vorliegenden Gleichungen ab. Im allgemeinen dürfte die Additions- und Subtraktionsmethode die vorteilhafteste sein. Umsichtige Verbindung der verschiedenen Methoden kürzt oft die Arbeit bedeutend ab. Nachfolgend mögen noch einige gelöste Beispiele Platz finden.

I. Gleichungen mit bestimmten Zahlen.

1) 1) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{30 - 3y}{2} = x - 8.$

2) $\frac{5y + 8}{6} - \frac{4x - y}{8} = \frac{y}{2}.$

Gl. 1) geordnet: $4x - 10 - 90 + 9y = 6x - 48,$

Oder: 3) $\mathbf{-2x + 9y = 52}.$

Gl. 2) geordnet: $20y + 32 - 12x + 3y = 12y,$

Oder: 4) $\mathbf{-12x + 11y = -32}.$

Gl. 3) mit 6 mult.: 5) $-12x + 54y = 312,$

Gl. 4) von Gl. 5) subtr.: 6) $43y = 344,$

y isoliert: $y = 8.$

Diesen Wert in Gl. 3 gesetzt: 7) $-2x + 72 = 52,$

Transponiert: $-2x = -20,$

Mit -1 multipliciert: $2x = 20,$

x isoliert: $x = \mathbf{10}.$

2) 1) $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = -3.$

2) $\frac{5}{x} - \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 29.$

3) $\frac{8}{x} + \frac{9}{y} - \frac{5}{z} = 34.$

Gl. 1) mit 2 multipl.: 4) $\frac{4}{x} + \frac{6}{y} - \frac{8}{z} = -6,$

„ 2) „ 3 „ : 5) $\frac{15}{x} - \frac{6}{y} + \frac{9}{z} = 87,$

„ 4) plus Gl. 5) multipl.: 6) $\mathbf{\frac{19}{x} + \frac{1}{z} = 81}.$

---

des ersten Grades mit mehreren Unbekannten gibt es u. a. noch die sog. Divinationsmethode und die sog. Determinantenmethode, auf die aber hier nicht näher eingegangen werden kann.

Gl. 1) mit 3 multipl.: 7) $\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{12}{z} = -9$,

„ 3) minus Gl. 7): 8) $\frac{2}{x} + \frac{7}{z} = 43$.

„ 6) mit 7 multipl.: 9) $\frac{133}{x} + \frac{7}{z} = 567$,

„ 9) minus Gl. 8): $\frac{131}{x} = 524$,

$$131 = 524x,$$
$$524x = 131,$$
$$x = \frac{1}{4}.$$

Diesen Wert in Gl. 8) subst.: $\frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{7}{z} = 43$,

$$8 + \frac{7}{z} = 43,$$
$$\frac{7}{z} = 35,$$
$$7 = 35z,$$
$$z = \frac{1}{5}.$$

Beide Werte in Gl. 1) gesetzt:

$$\frac{2}{\frac{1}{4}} + \frac{3}{y} - \frac{4}{\frac{1}{5}} = -3,$$
$$8 + \frac{3}{y} - 20 = -3,$$
$$\frac{3}{y} = 9,$$
$$\frac{1}{y} = 3,$$
$$y = \frac{1}{3}.$$

Zusatz. Kommen in den gegebenen Gleichungen die reciproken Werte der Unbekannten oder beliebige Vielfache dieser Werte vor, so empfiehlt es sich, die Nenner stehen zu lassen und die Additions- und Subtraktionsmethode anzuwenden.

3) 1) $x + y = 7$.
2) $x + z = 8$.
3) $y + z = 9$.

Gl. 1) + Gl. 2) + Gl. 3): 4) $2x + 2y + 2z = 24.$

Durch 2 div.: 5) $x + y + z = 12.$

Gl. 5 — Gl. 1): $z = 5.$

„ 5 — „ 2): $y = 4.$

„ „ — „ 3): $x = 3.$

II. Gleichungen mit allgemeinen Zahlen.

1) 1) $(m + n)x - (m - n)y = 4mn.$

2) $(m - n)x + (m + n)y = 2m^2 - 2n^2.$

Gl. 1) + Gl. 2): $2mx + 2ny = 2m^2 + 4mn - 2n^2,$

Durch 2) div.: 3) $mx + ny = m^2 + 2mn - n^2.$

Gl. 1) — Gl. 2): $2nx - 2my = 4mn - 2m^2 + 2n^2,$

Durch 2 div.: 4) $nx - my = 2mn - m^2 + n^2.$

Gl. 3) mit m mulpl.: 5) $m^2x + mny = m^3 + 2m^2n - mn^2,$

„ 4) „ n „ : 6) $n^2x - mny = 2mn^2 - m^2n + n^3,$

„ 5) + Gl. 6): 7) $m^2x + n^2x = m^3 + m^2n + mn^2 + n^3,$

$$x = \frac{m^2(m + n) + n^2(m + n)}{m^2 + n^2},$$

$$x = \frac{(m^2 + n^2)(m + n)}{m^2 + n^2},$$

$$x = m + n.$$

Diesen Wert in Gl. 3) subst.:

$$m(m + n) + ny = m^2 + 2mn - n^2,$$

$$ny = m^2 + 2mn - n^2 - m^2 - mn,$$

$$ny = mn - n^2,$$

$$ny = n(m - n),$$

$$y = \frac{n(m - n)}{n},$$

$$y = m - n.$$

2) 1) $x + y = z + 3b.$

2) $a(2x - z) = b(3y + z) + 6b^2.$

3) $\frac{6b}{a} + \frac{2y - z}{b} = \frac{3x - z}{a}.$

Aus Gl. 2) folgt: 4) $2ax - 3by - (a + b)z = 6b^2.$

„ „ 3) „ : 5) $3bx - 2ay + (a - b)z = 6b^2.$

„ „ 1) ist: $x = 3b - y + z.$

Diesen Wert in Gl. 4) eingesetzt:

$$6ab - 2ay + 2az - 3by - az - bz = 6b^2,$$

Oder: 6) $(a - b)z - (2a + 3b)y = 6b^2 - 6ab$.

Denselben Wert von x in Gl. 5) substituiert:

$$9b^2 - 3by + 3bz - 2ay + az - bz = 6b^2,$$

Oder: 7) $(a + 2b)z - (2a + 3b)y = - 3b^2$.

Gl. 6) — Gl. 7): $- 3bz = 9b^2 - 6ab,$

Mithin: $z = \mathbf{2a - 3b}$.

Setzt man diesen Wert in Gl. 7), so folgt:

$$(a + 2b)(2a - 3b) - (2a + 3b)y = - 3b^2,$$

Oder $(2a + 3b)y = 3b^2 + 2a^2 + ab - 6b^2,$

„ $(2a + 3b)y = 2a^2 + ab - 3b^2,$

Folglich: $y = \frac{2a^2 + ab - 3b^2}{2a + 3b},$

$$y = \mathbf{a - b}.$$

Beide Werte von y und z in Gl. 1) gesetzt:

$$x + a - b = 2a - 3b + 3b$$

$$x = \mathbf{a + b}.$$

III. Gleichungen mit Wurzelausdrücken.

1) 1) $\sqrt{x + y} = a + b.$

2) $x - y = (a - b)\sqrt{x + y}.$

Gl. 1) mit 2 potenz.: 3) $x + y = a^2 + 2ab + b^2$.

Aus Gl. 1) den Wert für $\sqrt{x + y}$ in Gl. 2) substituiert, kommt:

$$x - y = (a - b)(a + b)$$

Oder: 4) $x - y = a^2 - b^2$.

Gl. 3 + Gl. 4): $2x = 2a^2 + 2ab,$

Mithin: $x = \mathbf{a^2 + ab}$.

Gl. 3) — Gl. 4): $2y = 2ab + 2b^2$.

Folglich: $y = \mathbf{ab + b^2}$.

2) 1) $3\sqrt{8x - 3y} - 5\sqrt{5x + 3y} = - 23.$

2) $5\sqrt{8x - 3y} + 2\sqrt{5x + 3y} = 34.$

Gl. 1) $\times$ 5: 3) $15\sqrt{8x - 3y} - 25\sqrt{5x + 3y} = - 115.$

„ 2) $\times$ 3: 4) $15\sqrt{8x - 3y} + 6\sqrt{5x + 3y} = 102.$

Gl. 4) — Gl. 3): $31\sqrt{5x + 3y} = 217,$

Oder: $\sqrt{5x + 3y} = 7,$

„ 5) $\mathbf{5x + 3y = 49}$.

Gl. 1) $\times$ 2: 6) $6\sqrt{8x - 3y} - 10\sqrt{5x + 3y} = -46$.

„ 2) $\times$ 5: 7) $25\sqrt{8x - 3y} + 10\sqrt{5x + 3y} = 170$.

Gl. 6) + Gl. 7): $31\sqrt{8x - 3y} = 124$,

Oder: $\sqrt{8x - 3y} = 4$,

„ 8) $\mathbf{8x - 3y = 16}$.

Gl. 5) + Gl. 8): $13x = 65$,

Oder: $x = 5$,

Und: $y = 8$.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 33.

§. 45. Aufzustellende Gleichungen.

In Textaufgaben kommen häufig mehrere Unbekannte vor. In diesem Falle bildet man nach den Bedingungen der Aufgabe so viele Bestimmungsgleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind und löst die aufgestellten Gleichungen sodann auf. Beispiele.

1) Wenn man zum 4. Teil des 3fachen einer Zahl den 6. Teil des 5fachen einer andern Zahl addiert, so erhält man $9\frac{2}{3}$. Subtrahiert man dagegen vom 8. Teile des 10fachen der ersten Zahl den 16. Teil vom 2fachen der zweiten Zahl, so bleibt 4 übrig. Welches sind die beiden Zahlen?

Auflösung. Die beiden zu suchenden Zahlen mit x und y bezeichnet, erhält man den Bedingungen der Aufgabe gemäß folgende 2 Gleichungen:

$$1)\ \frac{3x}{4} + \frac{5y}{6} = \frac{29}{3}.$$

$$2)\ \frac{10x}{8} - \frac{2y}{16} = 4.$$

Schafft man die Nenner in beiden Gleichungen fort, so folgt:

$$3)\ 9x + 10y = 116$$

$$4)\ 20x - 2y = 64$$

3) mit 1 und 4) mit 5 multipliciert, erhält man:

$$5)\ \ 9x + 10y = 116$$

$$6)\ 100x - 10y = 320$$

5) und 6) addiert:

$$7)\ 109x = 436$$

Und daraus: $x = 4$.

Diesen Wert in 3) substituiert:

$$36 + 10y = 116$$

Oder: $10y = 80$

Und daraus: $y = 8.$

2) Für ein Kapital, das auf 1 Jahr ausgeliehen ist, müssen mit Einschluß der Zinsen nach dieser Zeit 2059,925 ℳ zurückbezahlt werden. Da die Rückzahlung erst nach 1,8 Jahren erfolgte, so war der Betrag derselben auf 2127,865 ℳ angewachsen. Wie groß ist das Kapital und zu wieviel % sind die Zinsen berechnet?

Auflösung. Bezeichnet man das ausgeliehene Kapital, in ℳ ausgedrückt, durch x, und die Prozente desselben durch y, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$1)\ x + \frac{xy}{100} = 2059{,}925$$

$$2)\ x + \frac{x \cdot y \cdot 1{,}8}{100} = 2127{,}865.$$

Löst man dieselben auf (nachdem man die Nenner beseitigt, kann man Gleichung 1) mit 1,8 multiplicieren und von ihr 2) subtrahieren, wodurch x gefunden wird, hierauf durch Substitution dieses Wertes in beide Gleichungen y bestimmen), so erhält man:

$$x = 1975 \text{ ℳ}$$

$$y = 4{,}3\ \%.$$

3) Ein Kapitalist B hat 1200 ℳ mehr ausstehen als A und die Prozente, welche er erhält, sind um $\frac{1}{4}$ % höher als die vom Kapitale des A; aus diesem Grunde nimmt er jährlich $68\frac{1}{2}$ ℳ mehr Zins ein als jener. C hat ein um 2000 ℳ größeres Kapital ausstehen als B und erhält $\frac{3}{4}$ % mehr als dieser, weshalb er jährlich $161\frac{1}{2}$ ℳ mehr Zins bezieht als B. Wie groß ist das Kapital jeder dieser drei Personen und wieviel Prozente bekommt jede?

Auflösung.

a) Algebraisch.

Angenommen, das Kapital des A betrage x ℳ; alsdann ist das Kapital des B $x + 1200$ ℳ und das des C $x + 1200 + 2000 = x + 3200$ ℳ. Ist das Kapital des A zu y % ausgeliehen, so ist das des B zu $y + \frac{1}{4}$ % und das des C zu $y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ \% = y + 1\ \%$ ausgeliehen.

Die Zinsen vom Kapital des A sind: $\frac{xy}{100}$,

Die Zinsen vom Kapital des B sind: $\frac{(x + 1200)(y + \frac{1}{4})}{100}$,

" " " " " C " $\frac{(x + 3200)(y + 1)}{100}$.

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$1)\ \frac{(x + 1200)(y + \frac{1}{4})}{100} = \frac{xy}{100} + 68\frac{1}{2},$$

$$2)\ \frac{(x + 3200)(y + 1)}{100} = \frac{xy}{100} + 230.$$

Gl. 1) geordnet: $xy + \frac{1}{4}x + 1200y + 300 = xy + 6850$,

Oder: $\frac{1}{4}x + 1200y = 6550$,

" **3) $x + 4800y = 26200$.**

Gl. 2) geordnet: $xy + x + 3200y + 3200 = xy + 23000$.

Oder: **4) $x + 3200y = 19800$.**

Gl. 3) — Gl. 4): 5) $1600y = 6400$,

Mithin: $y =$ **4** als Prozente vom Kapitale des A.

Diesen Wert in Gl. 4) ges.: $x + 12800 = 19800$,

Also: $x =$ **7000** *M* als Kapital des A.

A hat also ausgeliehen: 7000 *M* zu 4 %,

B " " " 8200 " " $4\frac{1}{4}$ % und

C " " " 10200 " " 5 %.

b) Arithmetisch.

Die Zinsen, welche A von 100 *M* erhält, seien der Kürze wegen als 1 Zinsteil bezeichnet. Es ergibt sich nun folgendes in Kürze:

$\frac{1}{400}$ vom Kapitale des A + 12 Zinsteile + 3 *M* = $68\frac{1}{2}$ *M*,

$\frac{1}{400}$ " " " " + 12 " = $65\frac{1}{2}$ "

ferner:

$\frac{1}{100}$ vom Kapitale des A + 32 Zinsteile + 32 *M* = 230 *M*,

$\frac{1}{100}$ " " " " + 32 " = 198 "

$\frac{1}{400}$ " " " " + 8 " = $49\frac{1}{2}$ ".

Es sind aber auch, wie vorhin bestimmt wurde,

$\frac{1}{400}$ vom Kapitale des A + 12 Zinsteile = $65\frac{1}{2}$ *M*.

Folglich sind 4 Zinsteile = 16 ".

Mithin beträgt 1 Zinsteil 4 *M*. A hat also sein Geld zu 4 %, B zu $4\frac{1}{4}$ % und C zu 5 % ausgeliehen.

Es ist $\frac{1}{400}$ vom Kapitale des A + 12 Zinsteile = $65\frac{1}{2}$ *M*,

12 Zinsteile sind aber $12 \cdot 4 = 48$ ";

Mithin beträgt $\frac{1}{400}$ vom Kapitale des A $65\frac{1}{2}$ ℳ — 48 ℳ = $17\frac{1}{2}$ ℳ und sein ganzes Kapital 400 · $17\frac{1}{2}$ ℳ = 7000 ℳ. Das Kapital des B ist mithin 8200 ℳ und das des C 10200 ℳ.

Erläuterung. B hat sein Geld um $^1/_4$ % höher ausgeliehen als A. So oft A also 100 ℳ besitzt, so oft nimmt B $^1/_4$ ℳ mehr an Zinsen ein als A, oder er nimmt $^1/_{400}$ vom Vermögen des A mehr ein. Außerdem hat B noch 1200 ℳ Kapital mehr als A. Von diesen nimmt er zunächst soviel an Zinsen ein, als A davon eingenommen hätte, nämlich 12 Zinsteile; dann aber noch $^1/_4$ % mehr, also 3 ℳ mehr. Es nimmt also B an Zinsen mehr ein als A: $^1/_{400}$ vom Kapitale des A + 12 Zinsteile + 3 ℳ, u. s. w.

4) Jemand beteiligte sich an einem Geschäfte mit 36000 ℳ. Hievon besaß er selbst 24000 ℳ, den Rest aber nahm er zu einem niedrigeren Zinsfuße auf, als das Geschäft abwarf. Auf diese Weise erzielte er einen Überschuß von 1680 ℳ an jährlichen Zinsen. Unter denselben Bedingungen machte er später ein ähnliches Geschäft und beteiligte sich an demselben mit 42000 ℳ eigenem und 18000 ℳ aufgenommenem Gelde. Hiebei ergab sich ein Überschuß von 2880 ℳ an jährlichen Zinsen. Wieviel % gab er, und wieviel erhielt er?

Auflösung.

a) Algebraisch.

Angenommen, er habe das Kapital zu x % aufgenommen und das Geschäft werfe y % ab. Alsdann erhält man nach den Bedingungen der Aufgabe die folgenden 2 Gleichungen:

$$1)\ \frac{36000y}{100} - \frac{12000x}{100} = 1680.$$

$$2)\ \frac{60000y}{100} - \frac{18000x}{100} = 2880.$$

Oder Gl. 1) $\quad 360y - 120x = 1680.$

reduz.: $\quad 3)\ \mathbf{3y - x = 14}.$

Desgl. Gl. 2) $\quad 600y - 180x = 2880.$

„ $\quad 4)\ \mathbf{10y - 3x = 48}.$

Gl. 3) mit 3 mult.: $\quad 5)\ 9y - 3x = 42.$

Gl. 4) — Gl. 5): $\quad 6)\ \mathbf{y = 6}.$

Und $\quad \mathbf{x = 4}.$

b) Arithmetisch.

1) 36000 ℳ oder 360 · 100 ℳ geben 360 Zinsteile (die Zinsen von 100 ℳ 1 Zinsteil genannt); von den 36000 — 24000 = 12000

= 120 · 100 ℳ hat er mithin 120 Zinsteile zu zahlen. Folglich sind die 360 Zinsteile der 36000 ℳ gleich den 120 Zinsteilen der 12000 ℳ und 1680 ℳ, oder 1 Zinsteil des ersten Kapitals ist gleich $\frac{1}{3}$ Zinsteilen des zweiten Kapitals und $\frac{1680}{360} = 4\frac{2}{3}$ ℳ.

Die Zinsen des Kapitals von 60000 ℳ geben 600 Zinsteile, und von den 18000 ℳ hat er 180 Zinsteile zu zahlen. Da 1 Zinsteil des ersten Kapitals gleich ist $\frac{1}{3}$ Zinsteilen des zweiten Kapitals und $4\frac{2}{3}$ ℳ, so sind die 600 Zinsteile des Kapitals von 60000 ℳ gleich $600 \cdot \frac{1}{3} = 200$ Zinsteilen und $600 \cdot 4\frac{2}{3} = 2800$ ℳ des zweiten Kapitals. Andererseits sind aber auch die 600 Zinsteile des ersten Kapitals gleich 180 Zinsteilen des zweiten Kapitals und 2880 ℳ. Es sind also:

200 Zinsteile + 2800 ℳ des zweiten Kapitals =
180 „ + 2880 „ „ „ „.

Folglich sind 200 — 180 = 20 Zinsteile des zweiten Kapitals gleich 2880 — 2800 ℳ = 80 ℳ, und 1 Zinsteil des zweiten Kapitals beträgt 80 : 20 = 4 ℳ. Die Prozente des aufgenommenen Kapitals betragen also 4.

2) Beim I. Geschäfte benützte er 24000 ℳ eignes u. 12000 ℳ geborgt. Kap.
„ II. „ „ „ 42000 „ „ „ 18000 „ „ „.

Hätte er beim I. Geschäfte 72000 ℳ eignes und 36000 ℳ geborgtes Geld benützt, so wäre der Überschuß 3 · 1680 = 5040 ℳ gewesen. Und hätte er beim II. Geschäfte 84000 ℳ eigenes und 36000 ℳ geborgtes Geld benützt, so würde sein Überschuß 2 · 2880 ℳ = 5760 ℳ betragen haben.

Es bewirken also:

72000 ℳ eig. u. 36000 ℳ geborgt. Geld einen Übersch. von 5040 ℳ
Und 84000 „ „ „ 36000 „ „ „ „ „ „ 5760 „.

Mithin bewirken 12000 ℳ eignes Kapital einen Zins von 720 ℳ, 100 ℳ also einen Zins von 6 ℳ. Er erhielt also 6 %.

Nun ist, wenn man die Prozente, die er zu geben hat, als 1 Tl. bezeichnet:

$$\frac{36000 \cdot 6}{100} - \frac{12000 \cdot 1 \text{ Tl.}}{100} = 1680$$

$$2160 - 120 \text{ Tl.} = 1680$$

$$120 \text{ Tl.} = 480$$

$$1 \text{ Tl.} = 4.$$

Folglich gab er für das geborgte Geld 4 %.

3) Zunächst wie unter 2); dann wie folgt weiter: Die Zinsen von 24000 M seines Kapitals betragen 240 · 6 M = 1440 M. Da er durch 24000 M eigenes und 12000 M geborgtes Kapital einen Überschuß von 1680 M erzielte, so muß er mit den 12000 M die Summe von 1680 — 1440 M = 240 M gewonnen haben; an 100 M hat er somit 2 M d. i. 2 % gewonnen. Hat er aber an dem geborgten Gelde 2 % gewonnen, so hat er für dasselbe 6 % — 2 % = 4 % zu zahlen gehabt.

4) Zunächst wie unter 2); dann so weiter: Für die 36000 M erhielt er 360 · 6 = 2160 M; der Überschuß betrug aber bloß 1680 M, also 480 M weniger. Mithin hatte er soviel für 12000 M zu zahlen, d. i. 4 %.

5) Mit 24000 M eig. u. 12000 M geborgt. Gelde erz. m. 1680 M Übersch.
„ 6000 „ „ „ 3000 „ „ „ also 420 „ „
„ 36000 „ „ „ 18000 „ „ „ „ 2520 „ „
„ 42000 „ aber „ 18000 „ „ „ „ 2880 „ „
„ 6000 „ eig. Geld folglich 360 „ „
„ 100 „ „ „ mithin 360 : 60 = 6 M = 6 %
u. s. w.

5) A kauft für 78000 M 4prozentige Staatspapiere, B für die gleiche Summe 4½prozentige. Zur Zeit des Ankaufs dieser Papiere stand der Kurs derselben so, daß B 125 M mehr Jahreszinsen davon bezog als A. Als in der Folgezeit beide Gattungen Staatspapiere um 3 % gestiegen waren, verkauften sie dieselben wieder. Dabei empfing A an Kapital 187,50 M mehr als B. Zu welchem Kurs waren die Papiere eingekauft?

Auflösung. Der zu suchende Kurs der Papiere des A sei x und der der Papiere des B y. Nun ergibt sich folgendes:

A bekam an Obligationen: $\frac{78000}{x} \cdot 100 = \frac{7800000}{x}$,

B „ „ „ : $\frac{78000}{y} \cdot 100 = \frac{7800000}{y}$.

An Zinsen erhielt A: $\frac{7800000 \cdot 4}{100 \cdot x} = \frac{312000}{x}$.

„ „ „ B: $\frac{7800000 \cdot 9}{y \cdot 100 \cdot 2} = \frac{351000}{y}$.

Daraus folgt: 1) $\frac{312000}{x} = \frac{351000}{y} - 125.$

Beim Verkaufe erhielt A:

$$\frac{7800000}{x \cdot 100} \cdot (x + 3) = 78000 + \frac{234000}{x},$$

Beim Verkaufe erhielt B:

$$\frac{7800000}{y \cdot 100} \cdot (y + 3) = 78000 + \frac{234000}{y}.$$

Daraus folgt:

$$2)\ 78000 + \frac{234000}{x} = 78000 + \frac{234000}{y} + 187{,}5.$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$x = 96$$
$$y = 104.$$

6) Drei Zahlen haben folgende Beschaffenheit. Addiert man 3 zur ersten und zweiten, so verhalten sich die Summen wie 3 : 5; addiert man 4 zur ersten und dritten, so verhalten sich die Summen wie 1 : 2; subtrahiert man aber 10 von der zweiten und dritten, so verhalten sich die Differenzen wie 16 : 21. Welche Zahlen sind es?

Auflösung. Bezeichnet man die 3 zu suchenden Zahlen der Reihe nach durch x, y und z, so erhält man:

$(x + 3) : (y + 3) = 3 : 5$, oder $5x + 15 = 3y + 9$.

Oder: $1)\ 5x - 3y = -6$.

Sodann: $(x + 4) : (z + 4) = 1 : 2$, oder $2x + 8 = z + 4$.

Oder: $2)\ 2x - z = -4$.

Endlich: $(y - 10) : (z - 10) = 16 : 21$, oder $21y - 210 = 16z - 160$.

Oder: $3)\ 21y - 16z = 50$.

Aus diesen Gl. erhält man $x = 24$, $y = 42$ und $z = 52$.

7) Jemand hat nach 2, 4 und 6 Jahren gewisse Summen Geldes, welche zusammen 11940 ℳ ausmachen, heimzuzahlen. Wollte er gegen einen Rabatt von 5 % (auf 100) dieselben jetzt bar erlegen, so brauchte er nur 9900 ℳ, und würde er nach 2 Jahren bei gleichem Rabatt alles auf einmal erlegen, so müßte er 10800 ℳ zahlen. Wie groß sind diese Teilsummen?

Auflösung. Bezeichnet man die nach 2 Jahren zu zahlende Summe mit x, die nach 4 Jahren zu zahlende mit y und die nach 6 Jahren zu zahlende mit z ℳ, so erhält man den Bedingungen der Aufgabe gemäß die folgenden Gleichungen:

$$1)\ x + y + z = 11940.$$

$$2)\quad \frac{x}{11} + \frac{y}{6} + \frac{3z}{13} = 2040.$$

$$3)\quad \frac{y}{11} + \frac{z}{6} = 1140.$$

Gl. 2) × 11: $4)\quad x + \frac{11y}{6} + \frac{33z}{13} = 22440.$

Gl. 4) — Gl. 1): $\frac{5}{6}y + \frac{20z}{13} = 10500.$

Durch 5 div.: $5)\quad \frac{y}{6} + \frac{4z}{13} = 2100.$

Gl. 5) × 6: $6)\quad y + \frac{24z}{13} = 12600.$

„ 3) × 11: $7)\quad y + \frac{11z}{6} = 12540.$

Gl. 6) — Gl. 7): $\frac{1}{78}z = 60$

$z = 4680$ M, u. s. w.

$x = 3300$ M.

$y = 3960$ M.

Erläuterung. 110 M, nach 2 Jahren zahlbar, sind 100 M bar wert; mithin beträgt der Barwert von 1 M $^{10}|_{11}$ M und von x M $^{10}|_{11}x$ M, der Rabatt also $^{1}|_{11}x$ M, ꝛc.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 34.

B. Gleichungen des zweiten Grades.

I. Mit einer Unbekannten.

§. 46. Reine quadratische Gleichungen.

1) Eine Gleichung von der Form $ax^2 = c$, in der, wie ersichtlich, die Unbekannte nur in der zweiten Potenz auftritt, heißt eine reine quadratische Gleichung. Dividiert man beide Seiten durch den Koëfficienten von x^2, so erhält man:

$$x^2 = \frac{c}{a}$$

Und daraus $$x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}.$$

2) Jede reine quadratische Gleichung hat immer zwei Wurzeln mit gleichen Zahlenwerten, aber entgegengesetzten Vorzeichen. Beide Wurzeln sind entweder zugleich reell oder zugleich imaginär; z. B. $x^2 = 400$, $x = \pm 20$, und $x^2 = -16$, $x = \pm\sqrt{-16} = \pm 4i$

Beispiele:

1) $30x^2 = 17280.$

x^2 isoliert: $x^2 = \frac{17280}{30} = 576.$

Durch 2 radiciert: $x = \pm\sqrt{576}.$

Das ist: $x = \pm 24.$

$$2)\ x + \sqrt{7 + x^2} = \frac{28}{\sqrt{7 + x^2}}.$$

Den Nenner weggeschafft: $x\sqrt{7 + x^2} + 7 + x^2 = 28.$

Den Wurzela. isoliert: $x\sqrt{7 + x^2} = 21 - x^2.$

Beide Seiten quadriert: $x^2(7 + x^2) = (21 - x^2)^2.$

Kl. gelöst: $7x^2 + x^4 = 441 - 42x^2 + x^4.$

Transp. u. zusg.: $49x^2 = 441.$

x^2 isoliert: $x^2 = \frac{441}{49} = 9.$

Radiciert: $x = \pm\sqrt{9}.$

Das ist: $x = \pm 3.$

3) Multipliciert man den vierten und fünften Teil einer Zahl mit einander, addiert zu diesem Produkte 20, dividiert hierauf diese Summe durch 8 und subtrahiert schließlich von dem erhaltenen Quotienten 5, so erhält man die Zahl 20. Wie heißt diese Zahl?

Auflösung. Wenn man die zu suchende Zahl mit x bezeichnet, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\frac{x}{4} \cdot \frac{x}{5} + 20}{8} - 5 = 20.$$

Oder: $\frac{x^2 + 400}{160} - 5 = 20.$

" $x^2 + 400 - 800 = 3200.$

" $x^2 = 3600.$

Radiciert: $x = \pm\sqrt{3600}.$

Das ist: $x = \pm 60.$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 35.

§. 47. Gemischte quadratische Gleichungen.

1) Die Gleichung $ax^2 \pm bx = c$ enthält die Unbekannte x außer in der zweiten auch in der ersten Potenz. Gleichungen dieser Beschaffenheit heißen unreine oder gemischte quadratische Gleichungen.

2) Ist eine solche Gleichung auf die Form $x^2 \pm bx = c$, in welcher x^2 den Koëfficienten $+ 1$ haben muß, gebracht (Normalform), so bestimmt man die beiden Wurzeln der Gleichung, d. h. löst dieselbe auf. Um das hiebei einzuschlagende Verfahren besser zu verstehen, bedenke man folgendes: Eine Gleichung von der Form $x^2 \pm bx = c$ kann bloß dadurch aufgelöst werden, daß man aus beiden Seiten derselben die Quadratwurzel zieht. Da nun aber die Ausziehung der Quadratwurzel ohne weiteres nicht möglich, indem die linke Seite der Gleichung kein vollständiges Quadrat ist, so kommt es darauf an, diese Seite durch Hinzufügung eines dritten Gliedes, der sogenannten quadratischen Ergänzung, zu einem vollständigen Quadrate zu machen.

3) Aus der Formel $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$ ergibt sich, daß das dritte Glied a^2 des aus $(x \pm a)$ gebildeten Quadrats das Quadrat der Hälfte des Koëfficienten 2a des zweiten Gliedes 2ax ist, ein Umstand, der uns das Mittel nahe legt, einen Ausdruck von der Form $x^2 + bx$ zum Quadrate zu vervollständigen. Dieses Mittel ist nämlich das Quadrat des halben Koëfficienten des zweiten Gliedes. Ist daher eine Gleichung von der Form $x^2 + bx = c$ aufzulösen, so addiert man zu beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koëfficienten von x (man ergänzt die Gleichung quadratisch). Beispiele:

1) $x^2 + 4x = 96.$

Quad. ergänzt: $x^2 + 4x + 2^2 = 96 + 4.$

In Form ein. Quad. darg.: $(x + 2)^2 = 100.$

Beiderseits durch 2 radic.: $x + 2 = \pm 10.$

Transponiert: $x = - 2 \pm 10.$

Mithin: $x_1 = 8.$

Und: $x_2 = - 12.$

Zusätze. 1) Der Gleichung $x^2 + 4x = 96$ leisten die beiden Werte 8 und $- 12$, wie man sich leicht überzeugen kann, Genüge.

2) Reduciert man die Gleichung $x^2 + 4x = 96$ auf Null, also: $x^2 + 4x - 96 = 0$, und bildet nun sowohl die Summe als auch das Produkt der beiden gefundenen Werte, so stellt sich heraus, daß diese beiden Wurzeln der vorgelegten gemischten quadratischen Gleichung mit dem Koëfficienten des zweiten Gliedes und mit dem dritten Gliede derselben in einem gewissen Zusammenhange stehen, der sich, da dasselbe von jeder gemischten quadratischen Gleichung gilt, folgendermaßen allgemein aussprechen läßt:

a) Die Summe der beiden Wurzeln einer gemischten quadratischen Gleichung ist gleich dem Koëfficienten des zweiten Gliedes der geordneten Gleichung mit dem entgegengesetzten Vorzeichen;

b) das Produkt der beiden Wurzeln einer solchen ist gleich dem bekannten dritten Gliede der geordneten Gleichung (Gesetz der Koëfficienten).

3) Nach dem Gesetze der Koëfficienten kann man leicht eine gemischte quadratische Gleichung bilden, deren Wurzeln zwei gegebene Zahlen sind. Soll man z. B. die Gleichung bilden, welche die Wurzeln 7 und 5 hat, so erhält man:

$$x^2 - (7 + 5) \cdot x + 7 \cdot 5 = 0.$$

Oder: $$x^2 - 12x + 35 = 0.$$

„ $$x^2 - 12x = - 35.$$

Ebenso ergibt sich auf die Frage: „Wie heißt die quadratische Gleichung, deren Wurzeln $1 + \sqrt{-1}$ und $1 - \sqrt{-1}$ sind" nach dem Gesetze der Koëfficienten die folgende Antwort:

$$x^2 - (1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1})x + (1 + \sqrt{-1})(1 - \sqrt{-1}) = 0.$$

Oder: $$x^2 - 2x + 2 =. 0$$

„ $$x^2 - 2x = - 2.$$

Löst man zur Probe diese Gleichung auf, so erhält man:

$$x^2 - 2x = - 2.$$

$$x^2 - 2x + 1^2 = - 2 + 1.$$

$$(x - 1)^2 = - 1.$$

$$x - 1 = \pm \sqrt{-1}.$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-1}.$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{-1}.$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{-1}.$$

4) Jede gemischte quadratische Gleichung hat im allgemeinen zwei ungleiche Wurzeln. Inbezug auf die Natur derselben treten uns

aus der Normalgleichung folgende Fälle entgegen (Diskussion der allgemeinen Formel):

I. Das bekannte Glied ist positiv, nämlich:

$$x^2 \pm px = +q.$$

Löst man diese Gleichung durch Hinzufügung der quadratischen Ergänzung auf, so erhält man, je nachdem p das Vorzeichen + oder — hat:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}, \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck sagt uns, daß wenn das bekannte Glied einer quadratischen Gleichung positiv ist, die Gleichung immer zwei reelle Wurzeln, und zwar eine positive und eine negative, hat. Ist das zweite Glied +, so ist der Zahlenwert der negativen Wurzel, ist es dagegen —, so ist der Zahlenwert der positiven Wurzel der größere.

Beispiele: 1) $x^2 + 4x = 96$; $x_1 = 8$; $x_2 = -12$.
2) $x^2 - 3x = 54$; $x_1 = 9$; $x_2 = -6$.

II. Das bekannte Glied ist negativ, nämlich:

$$x^2 \pm px = -q.$$

Aus dieser Gleichung erhält man auf die bekannte Weise, je nachdem das zweite Glied das Vorzeichen + oder — hat:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \tfrac{1}{4}p^2}, \text{ und}$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{-q + \tfrac{1}{4}p^2}.$$

Dieser allgemeine Ausdruck repräsentiert für den Fall, daß das bekannte Glied negativ ist, folgende Unterfälle:

Ist $q > \frac{p^2}{4}$, mithin der Radikand negativ, so hat die quadratische Gleichung zwei imaginäre Wurzeln.

Ist $q < \frac{p^2}{4}$, also der Radikand positiv, so ergeben sich für die Gleichung zwei reelle Wurzeln mit gleichen Vorzeichen (gleichstimmige Werte), und zwar, wenn das zweite Glied das Vorzeichen + hat, zwei negative, im andern Falle zwei positive.

Ist $q = \frac{p^2}{4}$, so sind die beiden Wurzeln gleich.

Beispiele: 1) $x^2 + 6x = -13$ (daraus ergeben sich 2 imaginäre Wurzeln).

2) $x^2 + 8x = -7$; $x_1 = -7$; $x_2 = -1$.

3) $x^2 - 6x = -5$; $x_1 = 5$; $x_2 = 1$.

4) $x^2 - 10x = -25$; $x_1 = x_2 = 5$.

5) Aus der Normalform einer jeden gemischten quadratischen Gleichung wird der Wert der Unbekannten, wie die vorstehenden Beispiele zeigen, immer in gleicher Weise entwickelt, d. h. aus:

$$x^2 + px = q \text{ folgt:}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Daher läßt sich die zu der Normalform einer gemischten quadratischen Gleichung gehörige Resultatformel als Rechnungsregel anwenden und ein für allemal wörtlich also merken:

„Die Unbekannte ist gleich dem Entgegengesetzen des halben Koëfficienten von x, ± der Quadratwurzel aus: dem bekannten Gliede auf der rechten Seite, nachdem dasselbe um das Quadrat des halben Koëfficienten von x vermehrt ist.“

Beispiel. $x^2 + 4x = 96$ (vergl. Beispiel 1).

$x = -2 \pm \sqrt{96 + 2^2}$.

$x = -2 \pm \sqrt{100}$.

$x = -2 \pm 10$.

$x_1 = 8$.

$x_2 = -12$.

Da das Resultat:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{4q + p^2}}{2},$$

so läßt sich als Rechnungsregel auch diese zweite Form anwenden, die dann den Vorzug verdient, wenn $p : 2$ nicht eine ganze Zahl ist. In Worten läßt sie sich so aussprechen:

„Die Unbekannte ist gleich der Hälfte des Ausdrucks: Entgegengesetztes des ganzen Koëfficienten von x, ± der Quadratwurzel aus dem Vierfachen des bekannten Gliedes auf der rechten Seite, das um das Quadrat des ganzen Koëfficienten von x vermehrt ist.“

Beispiel: $x^2 + 3x = 70.$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{280 + 9}}{2}.$$

$$x = \frac{-3 \pm 17}{2}.$$

$$x_1 = 7.$$

$x_2 = -10$ [1]).

2) $$\frac{x^2}{2} + \frac{x^2 + 36x + 324}{3} = 2082.$$

Nenner bes.: $3x^2 + 2x^2 + 72x + 648 = 12492.$

Zusg. u. transp.: $5x^2 + 72x = 11844.$

Durch 5 dividiert: $x^2 + \frac{72x}{5} = \frac{11844}{5}.$

Quadratisch ergänzt: $x^2 + \frac{72x}{5} + \left(\frac{36}{5}\right)^2 = \frac{11844}{5} + \frac{1296}{25}.$

Oder: $(x + \frac{36}{5})^2 = \frac{60516}{25}.$

Durch 2 radiciert: $x + \frac{36}{5} = \pm \frac{246}{5}.$

Mithin: $x = -\frac{36}{5} \pm \frac{246}{5}.$

$$x_1 = 42.$$

$$x_2 = -56\tfrac{2}{5}.$$

3) $\frac{1}{2}x(2t - (x - 1)d) = s.$

$$2tx - (x - 1)dx = 2s.$$

$$2tx - dx^2 + dx = 2s.$$

$$dx^2 - dx - 2tx = -2s.$$

$$dx^2 - x(d + 2t) = -2s.$$

$$x^2 - \frac{d + 2t}{d} \cdot x = \frac{-2s}{d}.$$

$$x^2 - \frac{d + 2t}{d} \cdot x + \left(\frac{d + 2t}{2d}\right)^2 = \left(\frac{d + 2t}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}.$$

$$\left(x - \frac{d + 2t}{2d}\right)^2 = \frac{(d + 2t)^2 - 8ds}{4d^2}.$$

$$x - \frac{d + 2t}{2d} = \pm \sqrt{\frac{(d + 2t)^2 - 8ds}{4d^2}}.$$

$$x = \frac{d + 2t}{2d} \pm \frac{1}{2d} \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}.$$

---

1) Durch Benützung der vorstehend angeführten zwei Rechnungsregeln kommt man bei Auflösung gemischter quadratischer Gleichungen rascher zum Ziele als durch Anwendung der quadratischen Ergänzung.

$$x = \frac{1}{2d}(d + 2t \pm \sqrt{(d + 2t)^2 - 8ds}).$$

4) $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{7x + 8} = \sqrt{20x + 1}.$

$$(\sqrt{2x + 1} + \sqrt{7x + 8})^2 = (\sqrt{20x + 1})^2.$$

$$2x + 1 + 2\sqrt{14x^2 + 23x + 8} + 7x + 8 = 20x + 1.$$

$$2\sqrt{14x^2 + 23x + 8} = 11x - 8.$$

$$(2\sqrt{14x^2 + 23x + 8})^2 = (11x - 8)^2.$$

$$4(14x^2 + 23x + 8) = 121x^2 - 176x + 64.$$

$$56x^2 + 92x + 32 = 121x^2 - 176x + 64.$$

$$-65x^2 + 268x = 32.$$

$$65x^2 - 268x = -32.$$

$$x^2 - \frac{268x}{65} = -\frac{32}{65}.$$

$$x^2 - \frac{268x}{65} + \left(\frac{134}{65}\right)^2 = -\frac{32}{65} + \frac{17956}{4225}.$$

$$(x - \tfrac{134}{65})^2 = \tfrac{15876}{4225}.$$

$$x - \tfrac{134}{65} = \pm \tfrac{126}{65}.$$

$$x = \tfrac{134}{65} \pm \tfrac{126}{65}.$$

$$x_1 = 4.$$

$$x_2 = \tfrac{8}{65}.$$

Zusatz. Mit Benützung der oben angegebenen Formel gestaltet sich die Auflösung wie folgt:

$$x^2 - \frac{268x}{65} = -\frac{32}{65},$$

$$x = \tfrac{134}{65} \pm \sqrt{-\tfrac{32}{65} + (\tfrac{134}{65})^2},$$

$$x = \tfrac{134}{65} \pm \sqrt{\tfrac{15876}{65}},$$

$$x = \tfrac{134}{65} \pm \tfrac{126}{65},$$

$$x_1 = 4,$$

$$x_2 = \tfrac{8}{65}.$$

5) A und B gaben zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen 4000 ℳ her. A ließ sein Geld 20 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 1600 ℳ. B ließ das seinige 12 Monate stehen und erhielt an Einlage und Gewinn 2600 ℳ. Wieviel hatte jeder eingelegt?

Ist die Einlage des A, in ℳ ausgedrückt x
so ist „ „ „ B, „ „ „ . . . . 4000 — x

A gewinnt an x ℳ in 20 Monaten . . . . . . 1600 — x
B „ „ (4000 — x) ℳ in 12 Monaten 2600 — (4000 — x) = ... (x — 1400)

Folglich gewinnt A an 1 ℳ in 1 Monat . . . . $\frac{1600 - x}{20x}$

„ „ B „ „ „ „ 1 „ . . . . . . $\frac{x - 1400}{(4000 - x)12}$

Mithin ergibt sich, da die Kapitalien beider Personen gleiche Prozente tragen, die Gleichung:

$$\frac{1600 - x}{20x} = \frac{x - 1400}{(4000 - x)12}.$$

Die Nenner weggeschafft:

$$3x^2 - 16800x + 19200000 = 5x^2 - 7000x.$$

Transp. u. zusammengefaßt: $- 2x^2 - 9800x = - 19200000.$

Mit — 1 mult. u. durch 2 dividiert: $x^2 + 4900x = 9600000.$

Ergänzt: $x^2 + 4900x + (2450)^2 = 9600000 + 6002500.$

Oder: $(x + 2450)^2 = 15602500.$

Aus beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$$x + 2450 = \pm \sqrt{15602500} = \pm 3950.$$

x isoliert: $x = - 2450 \pm 3950.$

Also: $x_1 = 1500.$

Und: $x_2 = - 6400.$

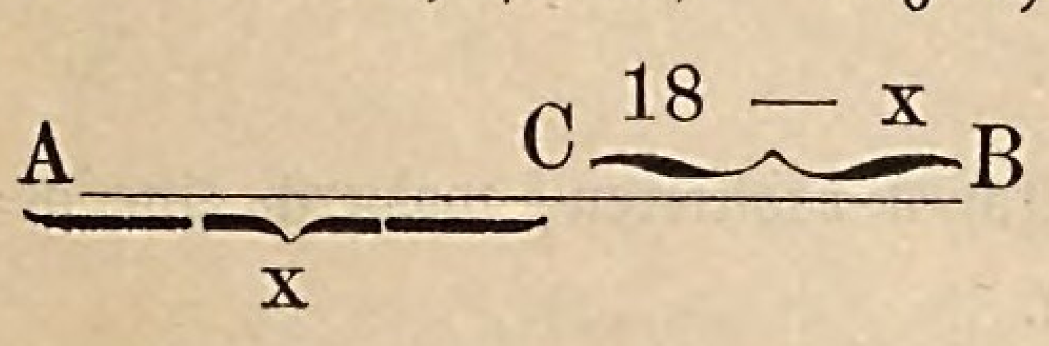
Die Einlage des A beträgt also 1500 ℳ und die des B 4000 — 1500 = 2500 ℳ.

6) Die Stärke zweier Lichter A und B, die a = 18 Meter von einander entfernt sind, verhalten sich wie m : n = 4 : 1. Welche Punkte der durch sie gehenden geraden Linie werden von ihnen gleich stark erleuchtet sein?

Auflösung.

a) Mit den gegebenen Zahlen.

Die Physik lehrt, daß die Stärke des Lichtes mit dem Quadrate der Entfernung abnimmt (m. a. W.: daß die Beleuchtungsstärken zweier Flächen sich verhalten, wie die reciproken Quadrate ihrer Entfernungen von der Lichtquelle). Bezeichnet man nun die Entfernung des zu findenden Punktes C von dem Lichte A mit x, so ist die Entfernung dieses Punktes vom Lichte B jedenfalls 18 — x. Ist



ferner die Stärke des Lichtes von A in der Entfernung 1 gleich 4 und von B ebenso gleich 1, so sind diese Lichtintensitäten der beiden Lichter an dem Punkte C:

$$4 \cdot \frac{1}{x^2} \text{ und } 1 \cdot \frac{1}{(18 - x)^2}, \text{ oder } \frac{4}{x^2} \text{ und } \frac{1}{(18 - x)^2};$$

(denn ist die Stärke in der Entfernung 1 gleich 4, so beträgt sie in einer Entfernung x, etwa 2, 3 u. s. w., nach obigem Gesetze nur den x^2ten Teil, den 2^2- oder 3^2ten Teil). Sollen nun beide Lichtstärken gleich sein, so ist:

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(18 - x)^2}.$$ [1]

Oder

$$4(324 - 36x + x^2) = x^2.$$
$$1296 - 144x + 4x^2 = x^2.$$
$$3x^2 - 144x = - 1296.$$
$$x^2 - 48x = - 432.$$
$$x^2 - 48x + 24^2 = - 432 + 576.$$
$$x - 24 = \pm 12.$$
$$x_1 = 12.$$
$$x_2 = 36.$$

Diese beiden Werte bedeuten, daß es zwei Punkte gibt, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen; der eine liegt zwischen den beiden Lichtern und zwar 12 m von dem stärkeren Lichte A entfernt; der andere in der Verlängerung der durch beide Lichter gehenden Geraden und zwar um 18 m über B hinaus. — Hätte man die x von B aus nach A gezählt, d. h. die Entfernung des Punktes C von dem schwächeren Lichte B mit x bezeichnet, so hätte man aus der Gleichung:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(18 - x)^2}$$

die beiden Werte x = 6 und — 18 gefunden, welche beide offenbar mit den beiden ersten zusammenfallen (— 18 bedeutet die entgegengesetzte Richtung von B).

Probe: Die Stärke des Lichtes A in der Entfernung 1 ist gleich 4, in der Entfernung 12 mithin bloß $4 : 12^2 = {}^1/_{36}$; die Stärke des Lichtes B in der Entfernung 1 ist gleich 1 und in der Entfernung 6 gleich $1 : 6^2 = {}^1/_{36}$; mithin sind die Lichtstärken in dem Punkte C gleichgroß.

---

1) Man könnte hier auch beide Seiten durch 2 radicieren, wodurch eine gemischte quadratische Gleichung umgangen würde.

b) Mit den gegebenen Buchstaben.

Setzt man in der Entwicklung unter a statt der Zahlen die gegebenen Buchstaben ein, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(a - x)^2}.$$

Und hieraus: $$x = \frac{am \pm a\sqrt{m \cdot n}}{m - n}.$$

Oder: $$x = \frac{a}{m - n}\left(m \pm \sqrt{m \cdot n}\right).$$

Substituiert man in diese Formel die bestimmten Zahlen, so erhält man x = 12 und 36.

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Aufl., §. 36.

§. 48. Gleichungen höheren Grades, welche sich auf quadratische zurückführen lassen.

1) Wie die gemischten quadratischen Gleichungen werden auch diejenigen höheren Gleichungen aufgelöst, welche die unbekannte Größe nur in zwei Potenzen enthalten, von denen die eine noch einmal so hoch ist als die andere. Jedoch muß man zuletzt noch eine Wurzel ausziehen, welche dem Grade des niederen Exponenten der unbekannten Größe entspricht. Beispiele:

$$1)\ x^4 + 6x^2 = 40.$$

Setzt man $x^2 = z$ und $x^4 = z^2$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in:

$$z^2 + 6z = 40.$$

Nun erhält man: $$z^2 + 6z + 3^2 = 40 + 9.$$

$$(z + 3)^2 = 49.$$

$$z + 3 = \pm 7.$$

$$z = -3 \pm 7.$$

$$z_1 = -3 + 7 = 4.$$

$$z_2 = -3 - 7 = -10.$$

Es ist also: $$x^2 = 4.$$

Mithin: $$x = \pm 2.$$

Und: $$x^2 = -10.$$

Also: $$x = \pm\sqrt{-10}.$$

$$2)\ x^6 + 4x^3 = 96.$$

Setzt man $x^3 = z$, also $x^6 = z^2$, so erhält man:

$$z^2 + 4z = 96.$$
$$z^2 + 4z + 2^2 = 96 + 4.$$
$$(z + 2)^2 = 100.$$
$$z + 2 = \pm 10.$$
$$z = -2 \pm 10.$$
$$z = 8 \text{ und } -12.$$

Mithin: $$x^3 = 8 \text{ und } -12.$$

Also: $$x = 2 \text{ und } \sqrt[3]{-12}.$$

2) Auf quadratische Gleichungen lassen sich auch reciproke Gleichungen höheren Grades zurückführen. Reciproke[1]) Gleichungen sind solche, welche dieselben bleiben, wenn man $1 : x$ an die Stelle von x setzt. Solche Gleichungen erkennt man schon an der Form. In denselben sind nämlich die Koëfficienten der Endglieder, sowie auch die Koëfficienten je zweier Glieder, welche von beiden Enden gleichweit abstehen, der Größe nach gleich, und haben entweder alle paarweise gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen. So ist z. B. die folgende Gleichung eine reciproke:

$$x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 7x + 1 = 0.$$

Dieselbe läßt sich auf folgende Weise auflösen: Man dividiert die ganze Gleichung durch x^2, wodurch man erhält:

$$1)\ x^2 + 7x + 12 + 7 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Vereinigt man je zwei Glieder, welche gleiche Koëfficienten haben, so ergibt sich:

$$2)\ x^2 + \frac{1}{x^2} + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Setzt man nun:

$$\alpha)\ x + \frac{1}{x} = z,$$

so ist: $$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = z^2,$$

also: $$\beta)\ x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2.$$

1) Von dem lat. reciprocus, auf demselben Wege zurückgehend, daher soviel als zurückgewandt, auf einander sich beziehend, wechselseitig (Hauptwort: Reciprocität, Wechselseitigkeit). Den reciproken Wert einer Größe erhält man, wenn man 1 durch diese Größe dividiert. Von a ist der reciproke Wert 1 : a.

Setzt man dies in Gl. 2) ein, so verwandelt sich diese in:

$$3)\ z^2 - 2 + 7z + 12 = 0,$$
$$z^2 + 7z = -10,$$
$$z^2 + 7z + (\tfrac{7}{2})^2 = -10 + \tfrac{49}{4},$$
$$(z + \tfrac{7}{2})^2 = \tfrac{9}{4},$$
$$z + \tfrac{7}{2} = \pm \tfrac{3}{2},$$
$$z_1 = -2,$$
$$z_2 = -5.$$

Setzt man diese Werte in Gl. α) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -1 \text{ und } \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = -\tfrac{1}{2}(-5 \pm \sqrt{21}).$$

3) Die reciproken Gleichungen von ungeradem Grade mit gleichen korrespondierenden Vorzeichen sind durch $x + 1$, dagegen diejenigen mit entgegengesetzten korrespondierenden Vorzeichen durch $x - 1$ teilbar. Daher lassen sich solche Gleichungen durch Division mit den genannten binomischen Faktoren auf reciproke Gleichungen von geradem Grade zurückführen. Diese aber lassen sich, wie das vorstehende Beispiel zeigt, auf eine Gleichung von der halben Ordnung bringen.

Beispiel. Dividiert man die reciproke Gleichung siebenten Grades:

$$x^7 - 2x^6 - x^5 + x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

durch $x + 1$, so erhält man eine reciproke Gleichung sechsten Grades, nämlich: $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0.$

II. Mit mehreren Unbekannten.

§. 49. Aufgestellte und aufzustellende Gleichungen.

Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten werden im allgemeinen so behandelt, wie die vom ersten Grade. In vielen Fällen ist es jedoch vorteilhaft, statt die Unbekannten unmittelbar selbst zu entwickeln, den Wert einer Verbindung derselben, z. B. ihrer Summe, Differenz u. s. w., zu bestimmen. Das hiebei einzuhaltende Verfahren, für das sich keine allgemeinen Regeln geben lassen, soll an einigen Beispielen erläutert werden.

1) 1) $x + y = 36$
2) $xy = 288.$

1. Auflösung. Aus Gleichung 2) ist $x = \dfrac{288}{y}$.

Diesen Wert in Gleichung 1) substituiert:

$$3)\ \frac{288}{y} + y = 36,$$

Oder: $y^2 - 36y = -288,$

„ $y^2 - 36y + 18^2 = -288 + 324,$

„ $(y - 18)^2 = 36,$

„ $y - 18 = \pm 6.$

Und daraus: $y_1 = 24,$

$y_2 = 12.$

Den Wert von y in 1) substituiert:

$x_1 = 12,$

$x_2 = 24.$

Es ist also: $x_1 = y_2 = 12.$

$x_2 = y_1 = 24.$

2. Auflösung. Aus 1) ist $x = 36 - y.$

„ 2) „ $x = \frac{288}{y}.$

Also 3) $36 - y = \frac{288}{y}$ u. s. w.

3. Auflösung.

Gleichung 1) quadriert: 3) $x^2 + 2xy + y^2 = 1296.$

Gleichung 2) mit 4 multipliciert: 4) $4xy = 1152.$

Gleichung 4) von 3) subtrahiert: 5) $x^2 - 2xy + y^2 = 144.$

Oder: $(x - y)^2 = 144.$

„ $x - y = \pm 12.$

Es sind nun die Werte der Summe und Differenz beider Unbekannten gefunden. Aus diesen lassen sich die Unbekannten selbst unmittelbar bestimmen. Die eine Unbekannte ist nämlich gleich der halben Summe plus der halben Differenz und die andere gleich der halben Summe minus der halben Differenz. Mithin:

$$x = \frac{36 \pm 12}{2} = \left.\begin{matrix}24\\12\end{matrix}\right\}.$$

$$y = \frac{36 \mp 12}{2} = \left.\begin{matrix}12\\24\end{matrix}\right\}.$$

2) 1) $x^2 + y^2 = a.$

2) $xy = b.$

Gleichung 2) mit 2 multipliciert: 3) $2xy = 2b.$

Gleichung 1) und 3) addiert: 4) $x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b.$

Oder: $(x + y)^2 = a + 2b.$

Folglich: 5) $x + y = \pm \sqrt{a + 2b}.$

Gleichung 3) von 1) subtrahiert: 6) $x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b.$

Oder: $(x - y)^2 = a - 2b.$

Folglich: 7) $x - y = \pm \sqrt{a - 2b}.$

Man findet mithin:

$$8)\ x = \frac{\pm \sqrt{a + 2b} \pm \sqrt{a - 2b}}{2}.$$

$$9)\ y = \frac{\pm \sqrt{a + 2b} \mp \sqrt{a - 2b}}{2}.$$

3) 1) $x^2 + y^2 = a.$

2) $x + y = b.$

Gleichung 1) mit 2 multipliciert: 3) $2x^2 + 2y^2 = 2a.$

Gleichung 2) quadriert: 4) $x^2 + 2xy + y^2 = b^2.$

Gleichung 4) von 3) subtrahiert: 5) $x^2 - 2xy + y^2 = 2a - b^2.$

Oder: $(x - y)^2 = 2a - b^2.$

Folglich: 6) $x - y = \pm \sqrt{2a - b^2}.$

Es ergibt sich nun:

$$7)\ x = \frac{b \pm \sqrt{2a - b^2}}{2}.$$

$$8)\ y = \frac{b \mp \sqrt{2a - b^2}}{2}.$$

4) Ein Kapital von 1500 ℳ hat in einer gewissen Zeit 360 ℳ Zinsen getragen. Als der Zinsfuß um 1 % erniedrigt wurde, brachte das Kapital erst in einer 2 Jahre längeren Zeit dieselben Zinsen. Wie hoch war der anfängliche Zinsfuß und wie lange stand das Kapital?

Ist der ursprüngliche Zinsfuß . . . . x,
so ist der um 1 % niedriger gestellte Zinsfuß . . . . $(x - 1)$.
Ist die Zeit, in Jahren ausgedrückt . . . . y,
so ist die 2 Jahre längere Zeit . . . . $(y + 2)$.

Die Zinsen von 1500 ℳ zu x % in y Jahren: $\frac{1500 \cdot xy}{100} = 15xy.$

" " " " " " $(x - 1)$ % in $(y + 2)$ Jahren: . . . . $\frac{1500(x - 1) \cdot (y + 2)}{100}.$

Da nun die Zinsen in beiden Fällen 360 ℳ betragen, so erhält man,

nachdem man den Ausdruck $\frac{1500(x-1)(y+2)}{100}$ durch Auflösung der Klammer in $15xy + 30x - 15y - 30$ verwandelt hat, die 2 Bestimmungsgleichungen:

$$1)\ 15xy = 360.$$
$$2)\ 15xy + 30x - 15y - 30 = 360.$$

Gl. 1) von Gl. 2) subtrahiert: 3) $30x - 15y = 30.$

Durch 15 dividiert: $2x - y = 2.$

x isoliert: $x = \frac{2+y}{2}.$

Dies. W. von x in Gl. 1) substituiert: 4) $15 \cdot \frac{2+y}{2} \cdot y = 360.$

Oder: $\frac{15y^2 + 30y}{2} = 360.$

" $15y^2 + 30y = 720.$

" $y^2 + 2y = 48.$

" $y^2 + 2y + 1^2 = 48 + 1.$

" $(y+1)^2 = 49.$

" $y + 1 = \pm\sqrt{49} = \pm 7.$

$y = -1 \pm 7.$

$y_1 = 6$ (Jahre).

$y_2 = -8.$

Setzt man den Wert von y_1 in Gleichung 1), so erhält man:

$$15x \cdot 6 = 360.$$
$$90x = 360.$$
$$x = \frac{360}{90} = 4 \text{ (Procent)}.$$

Übungsaufgaben.

Man vergleiche: Fuß, Aufgabensammlung, 3. Auflage, §. 37.

C. Gleichungen des dritten Grades.

§. 50. Das Wichtigste über dieselben.

1) Gleichungen des dritten Grades oder kubische Gleichungen sind solche, in denen die Unbekannte, nachdem die Gleichung geordnet ist, im Kubus vorkommt, und in keiner höheren Potenz. Kommt sie nur im Kubus vor, so heißt die Gleichung eine reine kubische Gleichung. Wenn die Unbekannte außer im Kubus auch in der zweiten und ersten Potenz auftritt, so wird die Gleichung eine vollständige kubische Gleichung genannt. Fehlt darin das

Quadrat der Unbekannten, so heißt sie eine reducierte oder transformierte kubische Gleichung. Die beiden letzteren führen den gemeinschaftlichen Namen gemischte kubische Gleichungen. Demnach ist: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ die allgemeinste Form einer vollständigen,

$$x^3 + bx + c = 0$$

die allgemeinste Form einer reducierten und

$$x^3 + c = 0$$

die der reinen kubischen Gleichung.

2) Die Auflösung einer reinen kubischen Gleichung wird wie folgt ausgeführt:

Ist $$x^3 - a^3 = 0,$$

so ist: $$x^3 = a^3,$$

Mithin: $$x = \sqrt[3]{a^3} = a.$$

Zusatz. Es ist also a eine und zwar reelle Wurzel dieser Gleichung. Ist aber $x = a$ eine Wurzel der kubischen Gleichung, so ist $(x - a)$ ein Faktor derselben, oder die kubische Gleichung ist durch $(x - a)$ ohne Rest teilbar. Nun ist aber $(x^2 - a^3) : (x - a) = x^2 + ax + a^2$. Mithin ist $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0$. Aus der Gleichung $x^2 + ax + a^2 = 0$ folgt aber:

$$x = \frac{a}{2} \cdot (-1 \pm \sqrt{-3}).$$

Das sind zwei weitere und zwar imaginäre Wurzeln der gegebenen Gleichung. Folglich hat die gegebene kubische Gleichung drei Wurzeln.

3) Um die reducierte kubische Gleichung:

$$x^3 + px + q = 0$$

aufzulösen, substituiere man zunächst

$$1)\ x = y + z$$

und setze $y + z$ für x in die gegebene Gleichung ein, wodurch sich ergibt:

$$(y + z)^3 + p(y + z) + q = 0.$$

Oder: $$y^3 + z^3 + 3yz(y + z) + p(y + z) + q = 0.$$

„ $$2)\ y^3 + z^3 + (3yz + p)(y + z) + q = 0.$$

Da eine von den Größen y und z beliebig angenommen werden kann, so setze man: $$3)\ 3yz + p = 0,$$

Also: $$4)\ z = -\frac{p}{3y}.$$

Mit Berücksichtigung von 3) und 4) folgt aus Gl. 2):

$$5)\ y^3 + z^3 + q = 0,$$

Oder: $$6)\ y^3 - \left(\frac{p}{3y}\right)^3 + q = 0,$$

" $$y^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{y^3} + q = 0,$$

" $$y^6 + q(y^3) = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

" $$(y^3)^2 + q(y^3) = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

" $$\left(y^3 + \frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Mithin: $$7)\ y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Da nun nach Gl. 5): $z^3 = -(y^3 + q)$ ist, so folgt aus Gl. 7):

$$8)\ z^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Setzt man nun die Kubikwurzeln der in 7) und 8) angegebenen Werte in 1) ein, so ergibt sich:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Da in dieser Formel gleichzeitig entweder die oberen oder unteren Zeichen gelten, sodaß in beiden Fällen dieselbe Summe entsteht, so ist:

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}.$$ [1)]

Beispiel: $x^3 - 3x - 2 = 0$; hier ist $p = -3$ und $q = -2$. Durch Einsetzung dieser Werte in vorstehende Formel erhält man:

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}},$$

$$x = 1 + 1 = 2.$$

Von der Aufsuchung der beiden anderen Wurzeln der Gleichung soll hier abgesehen werden.

4) **Vollständige kubische Gleichungen werden in reducierte kubische Gleichungen verwandelt und diese dann nach der Cardanischen Formel gelöst.**

---

1) Diese Auflösungsformel der kubischen Gleichungen heißt die Cardanische, weil sie von Cardanus (geb. 1501 zu Pavia, gest. 1575 zu Rom) zuerst veröffentlicht wurde. Gefunden hat sie Tartaglia aus Brescia (gest. 1557 zu Venedig), der sie Cardanus versteckt in Versen mitgeteilt hatte.

Anhang I.

Die unbestimmten Gleichungen.

1) Nach §. 44 sind zur Auflösung einer Aufgabe auf algebraischem Wege so viele von einander unabhängige Gleichungen erforderlich, als unbekannte Größen in der betreffenden Aufgabe vorkommen. Aufgaben, aus deren Bedingungen sich weniger Gleichungen ergeben, als sie Unbekannte enthalten, nennt man unbestimmte oder diophantische[1]) Aufgaben.

2) Die Lösung einer unbestimmten Aufgabe kann sehr viele verschiedene Resultate ergeben. Jedoch wird gewöhnlich die Anzahl derselben durch Nebenbedingungen beschränkt. Meistens wird verlangt, daß die zu suchenden Größen ganze positive Zahlen sein sollen. Im folgenden sollen auch nur solche Zahlen für die Unbekannten zulässig sein.

3) Die diophantischen Aufgaben führen zu Gleichungen, die nach Graden und nach der Zahl der Unbekannten gerade so verschieden sind, wie die Gleichungen zu bestimmten Aufgaben. Gleichungen mit einer Unbekannten sind natürlich ausgeschlossen.

4) Das Verfahren, das beim Auflösen diophantischer Aufgaben einzuschlagen ist, soll im folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden.

I. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades mit zwei Unbekannten.

1) Welche zwei Zahlen geben als Summe 17?

Auflösung. Ist die eine Zahl x und die andere y, so soll sein:

$$x + y = 17.$$

Mithin ist $x = 17 - y.$

Sollen nun bloß positive ganze Zahlen zulässig sein, so erhält man, wenn man für y der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 u. s. w. einsetzt, für x die Werte 16, 15, 14 u. s. w.

---

1) Diophantus, einer der größten Mathematiker des Altertums, der in der Mitte des 4. Jahrh. n. Chr. lebte, hat sich vorzugsweise mit der Lösung solcher Aufgaben befaßt.

2) In ähnlicher Weise sind die Aufgaben $x - y = 7$, $xy = 360$ und $x : y = 96$ zu behandeln!

3) Welche Zahlen der natürlichen Reihe geben, wenn man sie durch 5 dividiert, den Rest 1, wenn man sie aber durch 6 dividiert, den Rest 4?

Auflösung. Alle Zahlen von der Form $5x$ sind durch 5 ohne Rest teilbar, und alle von der Form $6y$ durch 6. Mithin lassen alle Zahlen von der Form $5x + 1$ bei ihrer Division durch 5 als Rest 1 und alle von der Form $6y + 4$ bei ihrer Division durch 6 den Rest 4. Der ersten Bedingung der Aufgabe genügen demnach alle Zahlen von der Form $5x + 1$ und der zweiten alle Zahlen von der Form $6y + 4$. Da nun jede der zu suchenden Zahlen gleichzeitig beiden Bedingungen entsprechen soll, so ergibt sich die Gleichung:

$$5x + 1 = 6y + 4.$$

Oder:

$$5x = 6y + 3.$$

"

$$x = \frac{6y + 3}{5} = y + \frac{y + 3}{5}.$$

Da x eine ganze Zahl sein soll, so setzt man:

$$\frac{y + 3}{5} = n.$$

Daraus folgt:

$$y + 3 = 5n.$$

Oder

$$y = 5n - 3.$$

Setzt man diesen Wert in obige Gleichung:

$$5x + 1 = 6y + 4,$$

so folgt:

$$5x + 1 = 6(5n - 3) + 4.$$

Oder:

$$5x + 1 = 30n - 18 + 4.$$

"

$$5x + 1 = 30n - 14.$$

Setzt man nun in die rechte Seite der Reihe nach für n die Zahlen 1, 2, 3, 2c., so erhält man als Zahlen, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen:

1) $30 \cdot 1 - 14 = 16.$
2) $30 \cdot 2 - 14 = 46.$
3) $30 \cdot 3 - 14 = 76.$
4) $30 \cdot 4 - 14 = 106$ u. s. w.

4) Es soll die Gleichung:

$$7x - 9y = 17$$

in positiven ganzen Zahlen gelöst werden!

Auflösung (nach der Eulerschen Methode der Reduktion). Man löst die Gleichung zunächst für die Unbekannte auf, welche den kleinsten Koëfficienten hat, hier also für x, und zwar so, daß man die ganzen Quotienten absondert, also:

$$x = \frac{17 + 9y}{7} = 2 + y + \frac{3 + 2y}{7} \ldots . 1)$$

Von diesen zwei Teilen, in welche x zerlegt ist, ist der eine, nämlich 2 + y, unbedingt eine ganze Zahl; damit aber x selbst eine ganze Zahl werde, muß auch der andere Teil, nämlich

$$\frac{3 + 2y}{7}$$

eine ganze Zahl sein. Man setzt darum diesen gebrochenen Quotienten gleich einer neuen unbekannten Größe, etwa a, und behandelt die gefundene Gleichung wie die gegebene, also:

$$\frac{3 + 2y}{7} = a, \text{ oder } 3 + 2y = 7a,$$

also $$y = \frac{7a - 3}{2} = 3a - 1 + \frac{a - 1}{2} \ldots . 2)$$

Von diesen beiden Teilen, in welche y zerlegt ist, ist 3a — 1 unbedingt eine ganze Zahl; damit nun y selbst eine ganze Zahl werde, muß auch der andere Teil, nämlich:

$$\frac{a - 1}{2}$$

eine ganze Zahl sein. Darum hat man weiter:

$$\frac{a - 1}{2} = b, \text{ oder } a - 1 = 2b,$$

also: $$a = 2b + 1 \ldots\ldots 3)$$

In dieser Weise fährt man fort, bis man, wie im vorliegenden Falle, auf den Koëfficienten Eins kommt. Ist a in dieser Weise bestimmt, so muß zunächst $\frac{a - 1}{2}$ und demnach auch y und $\frac{3 + 2y}{2}$ und folglich auch x eine ganze Zahl sein. Es ist also:

1) $a = 2b + 1$ (nach Gl. 3).

$y = 3a - 1 + \frac{a - 1}{2}$ (nach Gl. 2), oder durch Subst.

$y = 3(2b + 1) - 1 + b.$

$y = 6b + 3 - 1 + b.$

2) $\mathbf{y = 7b + 2}$.

$$x = 2 + y + \frac{3 + 2y}{7} \text{ (nach Gl. 1) oder:}$$

$$x = 2 + 7b + 2 + a.$$

$$x = 2 + 7b + 2 + 2b + 1.$$

3) $\mathbf{x = 9b + 5}$. Für b können nun alle positiven Zahlen von 0 bis ins Unendliche gesetzt werden.

Man hat daher:

$$7x - 9y = 17$$

$$x = 9b + 5$$

$$y = 7b + 2$$

b	0	1	2	3	4	5	...
x	5	14	23	32	41	50	...
y	2	9	16	23	30	37	...

Ins Unendliche.

Zusatz. Übersichtlich gestaltet sich vorstehende Auflösung wie folgt:

$$7x - 9y = 17.$$

$$x = \frac{17 + 9y}{7} = 2 + y + \frac{3 + 2y}{7} = 2 + y + a \ldots . 1)$$

$$\text{d. h. } \frac{3 + 2y}{7} = a.$$

$$y = \frac{7a - 3}{2} = 3a - 1 + \frac{a - 1}{2} = 3a - 1 + b \ldots . 2)$$

$$\text{d. h. } \frac{a - 1}{2} = b.$$

$$a = 2b + 1 \ldots . 3)$$

$$a = 2b + 1.$$

$$y = 3a - 1 + b = 7b + 2.$$

$$x = 2 + y + a = 9b + 5.$$

II. Unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades.

Von diesen sei hier nur eine Aufgabe gelöst, die für die Geometrie von Bedeutung ist, nämlich, es sollen drei Zahlen der Art bestimmt werden, daß das Quadrat der einen gleich der Summe der Quadrate der beiden andern ist (rechtwinklige Dreiecke anzugeben, deren Seiten in ganzen Zahlen ausgedrückt sind).

Auflösung. Bezeichnet man die beiden Katheten mit x und y und die Hypotenuse mit z, so hat man:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Oder $$x^2 = z^2 - y^2$$

" $$1)\ x^2 = (z + y)(z - y).$$

Setzt man nun: $z + y = 2n^2$.
Und: $z - y = 2m^2$.
So ist: $2z = 2n^2 + 2m^2$.
Also: 2) $z = n^2 + m^2$.
Und: $2y = 2n^2 - 2m^2$.
Also: 3) $y = n^2 - m^2$.
Durch Subst. der Werte von 2) und 3) in 1) erhält man:

$$x^2 = 2n^2 \cdot 2m^2 = 4n^2 \cdot m^2.$$

Also: 4) $x = 2nm$.

Es können nun für n und m beliebige ganze Zahlen gesetzt werden; jedoch muß $n > m$ und prim gegen m sein. Die Gleichungen 4), 3) und 2) ergeben nun die gesuchten Zahlenwerte für x, y und z, nämlich:

n	m	$x = 2mn$	$y = n^2 - m^2$	$z = n^2 + m^2$
2	1	4	3	5
3	2	12	5	13
4	1	8	15	17
4	3	24	7	25
5	2	20	21	29
5	4	40	9	41
5	3	30	16	34
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Man nennt diese Zahlen nach dem bekannten Satze vom rechtwinkligen Dreiecke die Pythagoreischen Dreieckszahlen, und rechtwinklige Dreiecke mit diesen Zahlen Pythagoreische Dreiecke.

Anhang II.

Einiges über die Zinseszinsrechnung[1]).

1) Werden die Zinsen eines Kapitals am Ende einer bestimmten Zeit dem Kapitale als neues verzinsliches Kapital zugerechnet, sodaß nun Kapital und Zinsen des ersten Zeitabschnitts das verzinsliche Kapital des darauf folgenden zweiten Zeitabschnitts bilden u. s. f., so sagt man von einem solchen Kapital: das Kapital stehe auf Zinseszins, oder es trage zusammengesetzten Zins (Gegensatz: einfache Zinsen).

1) Um mehrfach ausgesprochenen Wünschen zu entsprechen, folgt hier anhangsweise das Wichtigste über diese Rechnungsart.

So sind z. B. 1000 ℳ zu 5 % auf Zinseszins ausgeliehen, wenn die am Ende des ersten Jahres fälligen, 50 ℳ betragenden Zinsen zum Kapitale geschlagen werden und nun vom zweiten Jahre an 1050 ℳ zur Verzinsung kommen, und ebenso die Zinsen hievon, die am Ende des zweiten Jahres fällig sind und sich auf $52\frac{1}{2}$ ℳ belaufen, zinstragend zum Kapitale kommen, sodaß zu Anfang des dritten Jahres das zu verzinsende Kapital $1050 + 52\frac{1}{2} = 1102\frac{1}{2}$ ℳ beträgt u. s. w.

2) Die Zinseszinsrechnung findet nicht allein bei der Berechnung der Größe eines auf die angegebene Weise ausgeliehenen Kapitals Anwendung (Sparkassen, Lebensversicherungsanstalten), sondern sie kommt überall da vor, wo es sich um die Bestimmung eines gleichen stetigen Anwachsens, bezw. Fallens, gewisser Größen (z. B. Bevölkerungen, Waldungen) handelt.

3) Bei der Zinseszinsrechnung handelt es sich um dieselben Größen, wie bei der einfachen Zinsrechnung: um Kapital, Zeit, Zinsfuß und Zinsen (hier natürlich Zinseszinsen). Im folgenden soll allgemein der anfängliche Wert eines Kapitals mit k, der künftige Wert (oder Endwert) desselben mit K, der Zinsfuß mit p und die Anzahl der Jahre mit n bezeichnet werden.

4) Die Hauptaufgabe der Zinseszinsrechnung besteht darin, den Zusammenhang zwischen dem anfänglichen Kapital k, den Prozenten p, der Anzahl der Jahre n und dem künftigen Werte K des Kapitals zu untersuchen und durch Gleichungen auszudrücken. Nehmen wir diese Herleitung zunächst an einem bestimmten Beispiele vor.

5) Die Aufgabe: „Wieviel betragen 1000 ℳ zu 5 % mit Zinseszins in 5 Jahren" sei das bestimmte Beispiel. Das Kapital 100 ℳ trägt in einem Jahre 5 ℳ Zins; mithin ist der künftige Wert von 100 ℳ nach 1 Jahr bei 5 % = (100 + 5) ℳ, also der künftige Wert von 1 ℳ nach 1 Jahr bei 5 % gleich $\frac{100+5}{100}$ und von 1000 ℳ unter denselben Bedingungen: $1000 \cdot \frac{100+5}{100}$ ℳ. Diese $1000 \cdot \frac{100+5}{100}$ ℳ stehen nun das zweite Jahr auf Zinsen. Das Kapital 100 ℳ wächst bis zu Ende des zweiten Jahres wiederum zu (100 + 5) ℳ an, mithin 1 ℳ auf $\frac{100+5}{100}$ ℳ und das mit Anfang des zweiten Jahres

schon auf $1000 \cdot \frac{100 + 5}{100}$ ℳ angewachsene Kapital auf $1000 \cdot \frac{100 + 5}{100} \cdot \frac{100 + 5}{100} = 1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2$ ℳ. Diese $1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2$ ℳ stehen nun das dritte Jahr auf Zinsen. Das Kapital 100 ℳ wächst bis zu Ende des dritten Jahres wieder zu $(100 + 5)$ ℳ an, mithin 1 ℳ auf $\frac{100 + 5}{100}$ ℳ und das ganze, zinsentragende Kapital, das zu Anfang des dritten Jahres $1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2$ ℳ ausmachte, auf $1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^2 \cdot \frac{100 + 5}{100} = 1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^3$ ℳ. Durch dieselben Schlüsse findet man, daß das anfängliche Kapital am Ende des vierten Jahres auf $1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^4$ und am Ende des fünften Jahres auf $1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^5$ ℳ angewachsen ist. Also ist $K = 1000 \cdot \left(\frac{100 + 5}{100}\right)^5$ ℳ. Da sich der Ausdruck $\frac{100 + 5}{100}$ auch so schreiben läßt: $\frac{100}{100} + \frac{5}{100}$ oder $1 + 0{,}05$ oder $1{,}05$, so kann die obige Gleichung auch folgende Form annehmen: $K = 1000 \cdot (1{,}05)^5$. — Nunmehr wird auch die allgemeine Entwicklung der Hauptzinseszinsformel verständlich werden.

6) Da das Kapital k zu p % ausgeliehen ist, so tragen 100 ℳ in 1 Jahr p ℳ Zinsen; mithin ist der künftige Wert von 100 ℳ nach 1 Jahr bei p % $= (100 + p)$ ℳ, von 1 ℳ also $\frac{100 + p}{100}$ ℳ und von k ℳ : $k \cdot \frac{100 + p}{100}$ ℳ. Diese $k \cdot \frac{100 + p}{100}$ ℳ bilden nun für das zweite Jahr das zu verzinsende Kapital. Das Kapital 100 ℳ wächst auch im zweiten Jahre wieder zu $(100 + p)$ ℳ an, die Kapitaleinheit also, eine ℳ, zu $\frac{100 + p}{100}$ ℳ und das ganze zinstragende Kapital, das zu Anfang des zweiten Jahres $k \cdot \frac{100 + p}{100}$ ℳ betrug, zu $k \cdot \frac{100 + p}{100} \cdot \frac{100 + p}{100} = k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^2$ ℳ. Dies ist das Kapital, auf welches das anfäng-

liche Kapital k ℳ am Ende des zweiten Jahres angewachsen ist und das nun für's **dritte** Jahr zur Verzinsung kommt. Auch im dritten Jahre wächst 1 ℳ wieder zu $\frac{100 + p}{100}$ ℳ an, also $k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^2$ ℳ zu $k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^2$ ℳ $\cdot \frac{100 + p}{100}$ ℳ $= k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^3$ ℳ. Setzt man diese Schlüsse fort, so ergibt sich, daß der Wert des anfänglichen Kapitals am Ende des vierten Jahres: $k\left(\frac{100 + p}{100}\right)^4$, allgemein in n Jahren: $k\left(\frac{100 + p}{100}\right)^n$ ist. Daher erhalten wir als **Fundamentalgleichung** der Zinseszinsrechnung:

$$K = k \cdot \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n.$$

Da $\frac{100 + p}{100} = \frac{100}{100} + \frac{p}{100} = 1 + \frac{p}{100} = 1 + 0{,}0p = 1{,}0p$ [1]) ist, so kann man für die eben entwickelte Gleichung auch setzen:

$$K = k \cdot 1{,}0p^n.$$

Setzt man der Einfachheit wegen $\frac{100 + p}{100} = z$, so erhält man die noch kürzere Formel:

$$K = k \cdot z^n.$$

7) Die soeben entwickelte Fundamentalgleichung: $K = k \cdot z^n$ zeigt zunächst, wie man K findet, wenn k, p und n gegeben sind. Löst man diese Gleichung nach einander für jede der darin vorkommende Größe als Unbekannte auf, so erhält man drei weitere Gleichungen.

8) Im ganzen erhalten wir also für die Hauptaufgabe der Zinseszinsrechnung vier Gleichungen, die im folgenden mit ihren logarithmischen Auflösungen zusammengestellt sind:

---

1) An die Stelle von p muß man sich die Zahl gesetzt denken, welche die Prozente angibt. Ist also ein Kapital zu 3, 4, 5, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$, $12\frac{1}{2}$ % ausgeliehen, so geht 1,0p über in: 1,03, 1,04, 1,05, 1,045, 1,0475, 1,125.

$$\text{I. } K = k \cdot z^n \quad . \quad . \quad . \quad \log K = \log k + n \cdot \log z\text{[1]}.$$

$$\text{II. } k = \frac{K}{z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \log k = \log K - n \log z.$$

$$\text{III. } z = \sqrt[n]{\frac{K}{k}} \quad . \quad . \quad \log z = \frac{\log K - \log k}{n}.$$

$$\text{IV. } . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n = \frac{\log K - \log k}{\log z}.$$

9) Diese vier Gleichungen lehren, wie sich jede der vier Größen K, k, p und n bestimmen läßt, wenn drei derselben gegeben sind. Nennt man den Ausdruck $\frac{100 + p}{100}$ oder $1 + \frac{p}{100}$ oder 1,0p oder kurz z den Vergrößerungsfaktor, so lassen sich vorstehende Gleichungen folgendermaßen formulieren:

1) Man findet den Endwert eines auf Zinseszinsen ausgeliehenen Kapitals, wenn man den Vergrößerungsfaktor mit der Zahl der Jahre potenziert und mit diesem Resultat das gegebene Kapital multipliciert.

2) Man findet den anfänglichen (baren) Wert eines Kapitals, wenn man den Vergrößerungsfaktor mit der Zahl der Jahre potenziert und mit diesem Resultat in das gegebene Kapital dividiert u. s. w. Beispiele:

1) Auf welche Summe wachsen 4000 ℳ durch Zinseszins zu 5 % in 4 Jahren an?

Auflösung. a) Ohne Anwendung von Logarithmen.

1) Nach der oben entwickelten Formel ist:

$$K = k \cdot z^n.$$

Mithin: $K = 4000 \cdot 1{,}05^4.$

Oder: $K = 4862{,}04$ ℳ.

Nebenrechnung. Man muß hier 1,05 in die 4. Potenz erheben, wodurch man erhält: 1,21550625 oder 1,21551. Dies mit 4000 multipliziert, gibt obige Summe.

2) Ohne Benützung dieser Formel läßt sich die Aufgabe wie folgt auflösen:

---

1) Über das Rechnen mit Logarithmen vergleiche man den 2. Teil dieses Buches.

α) Kapital und Zins am Ende des 1. Jahres 4000 + 200 = 4200 ℳ
" " " " " " 2. " 4200 + 210 = 4410 ℳ
" " " " " " 3. " 4410 + 220,5 = 4630,5 ℳ
" " " " " " 4. " 4630,5 + 231,53 = 4862,03 ℳ

β) Kapital und Zins am Ende des 1. Jahres 4000 · 1,05 = 4200 ℳ
" " " " " " 2. " 4200 · 1,05 = 4410 ℳ
" " " " " " 3. " 4410 · 1,05 = 4630,5 ℳ
" " " " " " 4. " 4630,5 · 1,05 = 4862,03 ℳ

b) Mit Anwendung von Logarithmen.

Es ist: $K = k \cdot z^n$.

Oder: $\log K = \log k + n \cdot \log z$.

" $\log K = \log \cdot 4000 + 4 \cdot \log 1{,}05$.

" $\log K = \begin{cases} 3{,}6020600 \\ 0{,}0847572 \end{cases}$

$\log K = 3{,}6868172$

$\text{num} \log K = 4862{,}03$.

Mithin wächst das ausgeliehene Kapital auf 4862,03 ℳ an.

2) Welches Kapital wächst durch Zinseszins zu 5 % in 5 Jahren auf 2400 ℳ an?

Auflösung. a) Ohne Anwendung von Logarithmen. Nach der oben entwickelten Formel 2) ist:

$$k = \frac{K}{z^n}.$$

Mithin: $$k = \frac{2400}{1{,}05^5}.$$

Oder: $k = 1880{,}45 \ldots$ ℳ.

b) Mit Anwendung von Logarithmen. Es ist nach Formel 2):

$\log k = \log K - n \log z$.

Also: $\log k = \log 2400 - 5 \cdot \log 1{,}05$.

Oder: $\log k = \begin{cases} 3{,}3802112 \\ 0{,}1059465 \end{cases}$

$\log k = 3{,}2742647$

$\text{num} \log k = 1880{,}4 \ldots$ ℳ.

Anhang III.

Kurze Übersicht der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik, namentlich der Algebra.

1) Die ersten mathematischen Kenntnisse findet man bei den alten Ägyptern. Diese Kenntnisse kamen namentlich bei den großen Land- und Wasserbauten dieses Kulturvolkes in Anwendung.

2) Von den Ägyptern gingen diese Kenntnisse zu den Griechen über, von denen sie bedeutend erweitert und vertieft wurden. Als erste Förderer der mathematischen Kenntnisse können Thales von Milet (600 v. Chr.) und Pythagoras (580—500 v. Chr.) von Samos genannt werden (Kenntnis der Zifferrechnung, Satz vom rechtwinkligen Dreieck). Bedeutend wurde die Geometrie von Plato (429—348 v. Chr.) in Athen gefördert; der eigentliche systematische Ausbau derselben erfolgte aber erst durch Euklides (300 v. Chr.) in Alexandrien (sein berühmtes Werk: die „Elemente"). Um dieselbe Zeit lebten auch Archimedes (287—212 v. Chr.) in Syrakus (Berechnung von π, Begründer der Mechanik, Erzählung: „die goldene Krone des Hiero") und Appollonius (geb. 247 v. Chr.) in Alexandrien (sein berühmtes Werk über die Kegelschnitte), zwei der vier großen Mathematiker des Altertums (die zwei anderen Euklides und Diophantus).

3) Die mathematischen Genies des Altertums bebauten namentlich das Feld der Geometrie; die Entwicklung und Begründung der Arithmetik und Algebra beginnt erst mit Diophantus (um 360 n. Chr.) in Alexandrien, der als Erfinder dieser Wissenschaft zu betrachten ist (er lehrte die Auflösung der Gleichungen ersten und zweiten Grades, der unbestimmten Gleichungen 2c.)

4) Die wissenschaftliche Erbschaft der Griechen traten die Araber an und brachten die Mathematik und Astronomie zu bedeutender Entwicklung. Unter ihren Gelehrten sind vor allen zu nennen: Mohammed ben Musa (820 n. Chr.) und Thabith ben Korrah (833—901). Ihnen verdankt man die Erfindung der Trigonometrie, die Einführung unseres Ziffersystems und die Vervollkommnung der Algebra.

5) Als Erfinder unseres Ziffersystems sind jedoch die Araber nicht zu betrachten; vielmehr lernten sie dasselbe von den Indern kennen, bei denen sich die Mathematik ganz selbständig entwickelt hatte. Be-

rühmte indische Mathematiker sind: Aryabattha (geb. 476 n. Chr.) und Brahmegupta (geb. 598 n. Chr.)

6) Zu Anfang des 13. Jahrh. kam die Kunde von der Algebra der Araber nach Italien durch Leonardo aus Pisa, einen Kaufmann, und von da aus in die anderen Teile des Abendlandes. In Italien wurde in der Folge besonders die Algebra gepflegt (Hieronimus Cardanus 1501—1575 und Tartaglia), während in Deutschland hauptsächlich die Astronomie Pflege fand (Regiomontanus, Kopernikus und Kepler).

7) Das Haupthindernis, das der rascheren Entwicklung der Algebra entgegen stand, war die damalige umständliche und unbeholfene Bezeichnung und Schreibweise. Franz Vieta (1540—1603) in Paris beseitigte dasselbe durch Erfindung der Buchstabenrechnung und wurde dadurch der Begünder der modernen Algebra.

8) Nun begann eine Zeit, in der sich eine mathematische Entdeckung an die andere reihte. Von den Männern, die sich um den Ausbau der neueren Mathematik höchst verdient gemacht haben, mögen folgende angeführt werden:

1) John Napier (1550—1617) in Schottland (Erfinder der natürlichen Logarithmen);

2) Henry Briggs (1556—1630) in England (erfand die künstlichen Logarithmen);

3) René Descartes (spr. Däkärt) oder Renatus Cartesius (1596—1650) aus der Bretagne (führte die Bezeichnung der imaginären Zahlen ein, lehrte die Verbindung der Algebra mit der Geometrie);

4) Isaac Newton (spr. Njū't'n, 1642—1727), ein Engländer (entdeckte den allgemeinen binomischen Lehrsatz);

5) Leibnitz (1646—1716) in Leipzig (Erfinder der Differentialrechnung);

6) Leonhard Euler (1707—1783) aus Basel, Professor der Mathematik in Petersburg, der produktivste mathematische Schriftsteller (er vervollkommnete die Theorie der Gleichungen, erfand eine neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen ꝛc.)

7) Lagrange (spr. Lagränsch, 1736—1813), ein Franzose (wandte die Kettenbrüche zur Auflösung unbestimmter Gleichungen zweiten Grades an ꝛc.);

8) Gauß (1777—1855), Professor der Mathematik in Göt-

tingen (vervollkommnete die Zahlentheorie, berechnete Tafeln zur Berechnung der Logarithmen von Summen und Differenzen zc.).

9) Die Mathematik nimmt in der modernen Wissenschaft eine hervorragende, ja man kann sagen führende Stellung ein und ist für unser gesamtes Kulturleben von der allergrößten Bedeutung. Eine Reihe von Wissenschaften benützt die Mathematik als Mittel der Erkenntnis (Astronomie, Physik, Chemie zc.). Andere Wissenschaften oder eigentlich Künste (Baukunst zc.) bedürfen der Mathematik, um den Schöpfungen des Menschen Dauer und Zweckmäßigkeit zu verleihen. Ohne Mathematik ist es dem Menschen unmöglich, die Natur nachzuahmen und zu beherrschen; ja selbst das bürgerliche Leben und der Verkehr ist durch Mathematik geordnet und geregelt.

Fourier (spr. Fūrjē), einer der größten Mathematiker Frankreichs, spricht sich über die Bedeutung der Mathematik für die Wissenschaft in folgender Weise aus[1]: „Die Mathematik bildet sich nur allmählich weiter, aber sie wächst und fußt mitten unter den unaufhörlichen Schwankungen und den Irrtümern des menschlichen Geistes. Ihr Attribut ist die Klarheit, sie vereint getrennte Erscheinungen und entdeckt das geheime Band, welches sie vereinigt. Wenn Luft und Licht und die wogenden Erscheinungen der Elektricität und des Magnetismus uns zu entfliehen scheinen, wenn die Körper fern von uns in die Unermeßlichkeit des Raumes gestellt sind, wenn der Mensch das Schauspiel des Himmels verflossener Jahrhunderte schauen will und die Wirkungen der Schwere und der Wärme tief im ewig unzugänglichen Innern unseres Erdballs erforschen, dann ruft er die mathematische Analysis zu seiner Hilfe herbei. Sie verkörpert den unfühlbaren Stoff und fesselt die flüchtige Erscheinung, sie ruft die Körper aus der Unendlichkeit des Himmels und erschließt uns das Innere der Erde. Sie scheint eine Kraft des menschlichen Geistes, die bestimmt ist, uns für die Unvollkommenheit der Sinne und für die Kürze unseres Lebens zu entschädigen. Ja, was noch bewunderungswürdiger ist, sie befolgt einen und denselben Gang im Studium dieser Erscheinungen, sie erklärt alle durch dieselbe Sprache, fast als ob sie die Einheit und Einfachheit im Plane des Weltalls bezeugen wollte."

---

1) Man vergleiche die sehr empfehlenswerte Schrift: „Schellbach, Über die Zukunft der Mathematik an unsern Gymnasien," eine beredte Kundgebung zu gunsten der Mathematik als Lehrfach.

Anhang IV.

Empfehlenswerte Werke zum Weiterstudium.

Fuß, Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra, II. Teil; Nürnberg, Korn; 1,40 *M.*

Enthält die Lehre von den Logarithmen, Exponentialgleichungen, arithmetischen und geometrischen Progressionen, mit vielen, teilweise vollständig gelösten Übungsaufgaben, und ist hauptsächlich zum Selbstunterricht bestimmt.

Matthiessen, Schlüssel zur Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von Heis; Köln; 2 Bände; 8 *M.*

Umfaßt das ganze Gebiet der Buchstabenrechnung und Algebra und ist für den Selbstunterricht sehr geeignet.

Blind, Lehrbuch der Gleichungen des II. Grades; Stuttgart, Maier; 8 *M.*

Enthält eine sehr große Anzahl von Aufgaben großenteils in vollständig gelöster Form.

Fink, Kurzer Abriß einer Geschichte der Elementarmathematik; Tübingen, Laupp; 4 *M.*

Der Verfasser beabsichtigt, „Studierenden der Mathematik einen historischen Überblick über die elementaren Teile dieser Wissenschaft zu geben.“

Alphabetisches Register.

(Die Zahlen bedeuten die Seiten.)

Vögl

Fuß, Konrad,

Lehrbuch der Buchstabenrechnung und Algebra für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet

Bd.: 1

1892